

n 元泛齐次核重积分算子最佳搭配参数的等价条件及应用*

李真^{1)†}, 李思茜¹⁾, 邓冠铁²⁾, 孔荫莹¹⁾

(1) 广东财经大学统计与数据科学学院, 广东广州; 2) 北京师范大学数学科学学院, 北京)

摘要 提出 n 元泛齐次函数的概念, 统一了齐次函数、广义齐次函数, 以及一类非齐次函数; 探讨了基于权函数法的 n 元泛齐次核 Hilbert 型重积分不等式的最佳搭配参数, 并得到其充分必要条件与最佳常数因子的表达式; 给出对应重积分算子 T 最佳搭配参数的等价条件及算子范数的表达式; 讨论了形如 $\exp(-x_1^{\lambda_1} \sum_{i=2}^n x_i^{\lambda_i})$ 的非齐次核重积分算子的有界性及其范数求解问题.

关键词 n 元泛齐次核; Hilbert 型重积分不等式; 加权 Lebesgue 空间; 最佳搭配参数; 算子范数; n 元指数型耦合核

中图分类号 O178

DOI: 10.12202/j.0476-0301.2025170

0 引言

Hilbert 型积分不等式及其相关算子问题作为调和分析与泛函分析交叉领域的主要课题, 其发展历程体现了现代分析学从线性对称结构向非线性非对称体系演进的内在逻辑.

Hilbert 型积分不等式的研究最早可追溯至 1925 年 Hardy^[1] 的奠基性工作. 设共轭指数 $p, q > 1$, 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

当 $f \in L_p(0, +\infty)$ 、 $g \in L_q(0, +\infty)$ 时, 经典 Hilbert 型积分不等式表述为

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{|f(x)g(y)|}{x+y} dx dy \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p \|g\|_q,$$

式中常数因子 $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ 是最佳值.

通过该不等式可以得到具有 -1 阶齐次核 $\frac{1}{x+y}$ 的积分算子

$$T(f)(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+y} f(x) dx$$

是 $L_p(0, +\infty)$ 中的有界算子, 算子范数为 $\|T\| = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$.

Xu 等^[2] 创立了权函数方法, 该方法为 Hilbert 型

积分不等式的深入研究奠定了基础, 成为讨论 Hilbert 型积分不等式的基本方法. Kuang^[3]、Yang 等^[4] 利用权函数方法, 将 Lebesgue 空间推广为加权 Lebesgue 空间, 并引入独立参数 λ , 分别得到 $-\lambda$ 阶齐次核的 Hilbert 型积分不等式, 即

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{|f(x)g(y)|}{x^\lambda + y^\lambda} dx dy \leq \frac{\pi}{\lambda \sin(\pi/p)} \|f\|_{p,1-\lambda} \|g\|_{q,1-\lambda}, \quad (1)$$

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{|f(x)g(y)|}{(x+y)^\lambda} dx dy \leq B\left(\frac{p+\lambda-2}{p}, \frac{q+\lambda-2}{q}\right) \|f\|_{p,1-\lambda} \|g\|_{q,1-\lambda}, \quad (2)$$

式(1)和(2)的常数因子皆为最佳值, 且通过式(1)和(2), 可知具有 $-\lambda$ 阶齐次核 $\frac{1}{x^\lambda + y^\lambda}$ 的积分算子

$$T_1(f)(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda + y^\lambda} f(x) dx,$$

以及具有 $-\lambda$ 阶齐次核 $\frac{1}{(x+y)^\lambda}$ 的积分算子

$$T_2(f)(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+y)^\lambda} f(x) dx$$

皆为 $L_p^{1-\lambda}(0, +\infty)$ 到 $L_p^{(1-\lambda)(1-p)}(0, +\infty)$ 的有界算子. 相应算子范数分别为

* 广东省教育厅科研资助项目(2023KTSCX034, 2024ZDX2088); 广东省本科高校“2025 年人工智能赋能基础课程教学改革研究”资助项目(25GGYB03); 高等学校大学数学教学研究与发展中心资助项目(CMC20240605); 广东省教育厅创新团队资助项目(2022WCXTD009); 广东省研究生教育创新计划资助项目(2024SFKC_042)

† 通信作者: 李真(1984—), 副教授, 硕士生导师. 研究方向: 复分析. E-mail: zhenlee2011@gdufe.edu.cn

收稿日期: 2025-09-17

$$\|T_1\| = \frac{\pi}{\lambda \sin(\pi/2\lambda)},$$

$$\|T_2\| = B\left(\frac{p+\lambda-2}{p}, \frac{q+\lambda-2}{q}\right).$$

$L_p^\alpha(0, +\infty)$ 表示加权 Lebesgue 空间, 即

$$L_p^\alpha(0, +\infty) = \left\{ f(x) : \|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

洪勇^[5]对 Hilbert 型积分不等式进行了积分重数和多参数方面的全方位推广.

设

$$\begin{aligned} a &> 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} &= 1, \\ r_i &= \frac{1}{p_i} \prod_{i=1}^n p_i, \\ \lambda &> \frac{1}{a} \left(n-1 - \frac{1}{r_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \cdots \int_a^\infty \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - a)^\alpha \right)^\lambda} \prod_{i=1}^n |f_i(x_i)| dx_1 dx_2 \cdots dx_n &\leq \\ \frac{\Gamma^n(1/\alpha)}{\alpha^{n-1} \Gamma(\lambda)} \prod_{i=1}^n \left[\Gamma\left(\frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right)\right) \Gamma\left(\lambda - \frac{1}{a} \left(n-1 - \frac{1}{r_i} \right)\right) \right. \\ \left. \int_a^\infty (t-a)^{n-1-\alpha\lambda} |f_i(t)|^{p_i} dt \right]^{1/p_i}. \end{aligned}$$

Yang^[6]在该基础上利用权函数方法得到如下结论.

设

$$\begin{aligned} n &\geq 2, \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} &= 1 \quad (p_i > 1), \\ \lambda &> n - \min_{1 \leq i \leq n} \{p_i\}, \\ f_i &\in L_p^{n-1-\lambda}(0, +\infty), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \frac{|f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)|}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\lambda} dx_1 \cdots dx_n &\leq \\ \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{p_i + \lambda - n}{p_i}\right) \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i, n-1-\lambda}, \end{aligned}$$

式中最佳常数因子为

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{p_i + \lambda - n}{p_i}\right).$$

相应地, 令

$$q_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i} \right)^{-1},$$

通过该不等式, 可知具有 $-\lambda$ 阶 n 元齐次核

$$\frac{1}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\lambda}$$

的积分算子

$$\begin{aligned} T_3(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})(x_n) &= \\ \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \frac{f_1(x) f_2(x) \cdots f_{n-1}(x)}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\lambda} dx_1 \cdots dx_{n-1}, \end{aligned}$$

是从

$$\prod_{i=1}^{n-1} L_{p_i}^{n-1-\lambda}(0, +\infty)$$

到

$$L_{q_n}^{(n-1-\lambda)(1-q_n)}(0, +\infty)$$

的有界算子, 算子范数为

$$\|T_3\| = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{p_i + \lambda - n}{p_i}\right).$$

$\prod_{i=1}^{n-1} L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty)$ 表示 $L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty), i = 1, 2, \dots, n-1$ 的乘积空间^[7]

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n-1} L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty) &= \\ \{(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) : f_i(x_i) \in L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty), i = 1, 2, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Hilbert 型不等式的研究迅猛发展, 这些结果被推广到齐次核、广义齐次核和若干非齐次核的情形^[7-8, 10-13, 15-16].

洪勇^[17]讨论了构建具有齐次核的 Hilbert 型积分不等式及同核有界积分算子的最佳搭配参数问题, 并证明了充分必要性, 从理论上较为完善地解决了 Hilbert 型积分不等式的一个重要理论问题, 随后该文献结果被大量推广^[9, 14, 18-22].

洪勇^[19]提出了具有参数 $\{\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2\}$ 的超齐次函数 $K(x, y)$, 它统一了齐次函数、广义齐次函数及形如

$$K_1(x, y) = G(x^{\lambda_1} y^{\lambda_2})$$

的非齐次函数, 并利用权函数法得到不等式

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K(x, y) |f(x) g(y)| dx dy &\leq \\ \left(\frac{1}{|\tau_1|} \right)^{1/q} W_1 \left(-\frac{\beta+1}{q} \right) \|f\|_{p,\alpha} \|g\|_{q,\beta}, \end{aligned}$$

式中最佳常数因子为

$$\left(\frac{1}{|\tau_1|} \right)^{1/q} W_1 \left(-\frac{\beta+1}{q} \right).$$

同理, 令

$$\beta(1-p) = \gamma,$$

通过以上不等式, 可得相应的积分算子

$$T_4(f)(y) = \int_0^{+\infty} K(x, y) f(x) dx$$

是从 $L_p^\alpha(0, +\infty)$ 到 $L_p^\gamma(0, +\infty)$ 的有界算子, 算子范数为

$$\|T_4\| = \left(\frac{1}{|\tau_1|}\right)^{1/q} W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right).$$

研究发现,指数型耦合函数

$$K_2(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1(x_2+x_3)}$$

虽为非齐次函数,但在定义和维数上皆不属于上述超齐次函数的范畴.对于具有该形式核的积分算子

$$T_5(f_1, f_2)(x_3) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x_1(x_2+x_3)} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2$$

的最佳搭配参数需要满足的条件,以及其算子范数 $\|T_5\|$ 的计算问题值得探讨.这些问题的解决对于 Feynman-Kac 半群的有界性分析、参数矩阵与算子谱半径关联的研究,以及非平衡态统计力学应用的探索具有重要意义.

为了从更一般的角度讨论问题,统一 n 元齐次函数、 n 元广义齐次函数,以及形如

$$K_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp\left(-x_1^{\lambda_1} \sum_{i=2}^n x_i^{\lambda_i}\right),$$

$$\lambda_i \lambda_j > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

的 n 元指数型耦合函数($n \geq 3$),本文引入 n 元泛齐次函数 $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (见定义 1).

本文在文献 [7, 19] 的基础上,讨论以 n 元泛齐次函数为核的 Hilbert 型重积分不等式及其对应重积分算子的最佳搭配参数问题,并给出相应的应用.

1 相关定义与引理

定义 1 设

$$n \geq 3, \quad \sigma_i, \tau_{ij} \in \mathbf{R}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

若函数 $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足: 对于任意 $t > 0$, 有

$$K(tx_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) = t^{\sigma_1} K(x_1, t^{\tau_{12}} x_2, t^{\tau_{13}} x_3, \dots, t^{\tau_{1n}} x_n),$$

$$K(x_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) = t^{\sigma_2} K(t^{\tau_{21}} x_1, x_2, t^{\tau_{23}} x_3, \dots, t^{\tau_{2n}} x_n),$$

$\vdots$

$$K(x_1, x_2, tx_3, \dots, tx_n) = t^{\sigma_n} K(t^{\tau_{n1}} x_1, t^{\tau_{n2}} x_2, t^{\tau_{n3}} x_3, \dots, x_n),$$

则称 $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是具有参数

$$\{\sigma_i, \tau_{ij}\}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

的 n 元泛齐次函数.

可考虑 $n \times (n+1)$ 元矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} & -\sigma_1 \\ \tau_{21} & -1 & \cdots & \tau_{2n} & -\sigma_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & -1 & -\sigma_n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

A 的前 n 行前 n 列构成的方阵的主对角元素为 -1 , τ_{ij} 为 A 的第 i 行第 j 列元素 $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 矩阵 A 的第 $n+1$ 列为 $(-\sigma_1, -\sigma_2, \dots, -\sigma_n)^T$.

不难看出, A 与 $\{\sigma_i, \tau_{ij}\}$ 一一对应.

若 $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元泛齐次函数, 由于

$$K(tx_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) = t^{\sigma_1} K(x_1, t^{\tau_{12}} x_2, t^{\tau_{13}} x_3, \dots, t^{\tau_{1n}} x_n) =$$

$$t^{\sigma_1 + \tau_{12}\sigma_2} K(t^{\tau_{12}\tau_{21}} x_1, x_2, t^{\tau_{13} + \tau_{12}\tau_{23}} x_3, \dots, t^{\tau_{1n} + \tau_{12}\tau_{2n}} x_n),$$

$$K(x_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) = t^{\sigma_2} K(t^{\tau_{21}} x_1, x_2, t^{\tau_{23}} x_3, \dots, t^{\tau_{2n}} x_n) =$$

$$t^{\sigma_2 + \tau_{23}\sigma_3} K(t^{\tau_{21} + \tau_{23}\tau_{31}} x_1, t^{\tau_{23}\tau_{32}} x_2, x_3, \dots, t^{\tau_{2n} + \tau_{23}\tau_{3n}} x_n),$$

$\vdots$

$$K(x_1, x_2, tx_3, \dots, tx_n) = t^{\sigma_n} K(t^{\tau_{n1}} x_1, t^{\tau_{n2}} x_2, t^{\tau_{n3}} x_3, \dots, x_n) =$$

$$t^{\sigma_n + \tau_{n1}\sigma_1} K(x_1, t^{\tau_{n2} + \tau_{n1}\tau_{12}} x_2, t^{\tau_{n3} + \tau_{n1}\tau_{13}} x_3, \dots, t^{\tau_{nn}} x_n),$$

$$K(tx_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) = t^{\sigma_1} K(x_1, t^{\tau_{12}} x_2, t^{\tau_{13}} x_3, \dots, t^{\tau_{1n}} x_n) =$$

$$t^{\sigma_1 + \tau_{13}\sigma_3} K(t^{\tau_{13}\tau_{31}} x_1, t^{\tau_{12} + \tau_{13}\tau_{32}} x_2, x_3, \dots, t^{\tau_{1n} + \tau_{13}\tau_{3n}} x_n).$$

由上述提取过程可得

$$\tau_{ij}\tau_{ji} = 1,$$

$$\tau_{ik} + \tau_{ij}\tau_{jk} = 0,$$

$$\sigma_i + \tau_{ij}\sigma_j = 0,$$

$$i \neq j \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

因此不失一般性, 本文的讨论总在上述条件下进行.

引理 1 A 如定义 1, 当且仅当 $r(A) = 1$ 时,

$$\sum_{i \neq k} \tau_{ki}(a_i - 1) - (a_k - 1) = -\sigma_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

两两等价.

证明 令

$$a_i - 1 = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则

$$\sum_{i \neq k} \tau_{ki}(a_i - 1) - (a_k - 1) = -\sigma_k$$

两两等价的充分必要条件是 n 元线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 + \tau_{12}x_2 + \tau_{13}x_3 + \cdots + \tau_{1n}x_n = -\sigma_1, \\ \tau_{21}x_1 - x_2 + \tau_{23}x_3 + \cdots + \tau_{2n}x_n = -\sigma_2, \\ \vdots \\ \tau_{n1}x_1 + \tau_{n2}x_2 + \cdots + \tau_{nn}x_n - x_n = -\sigma_n \end{cases}$$

中任意 2 个方程的系数对应成比例, 当且仅当 $r(A) = 1$.

由式 (4) 可知, 任取 A 的第 i 行和第 j 行都有

$$-1 = -\tau_{ij} \cdot \tau_{ji}, \tau_{ik} = -\tau_{ij} \cdot \tau_{jk}, \sigma_i = -\tau_{ij} \cdot \sigma_j,$$

即存在比例因子

$$\lambda_{ij} = -\tau_{ij},$$

使得 A 的第 i 行和第 j 行成比例, 也就是说在一般情形下都有 $r(A) = 1$.

引理 1 得证.

引理 2 设

$$n \geq 3, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1 \quad (p_i > 1), \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元泛齐次非负可测函数, 并记

$$W_j = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_{j+1}, \dots, t_n) \cdot$$

且当

$$\prod_{i \neq j} t_i^{-a_i} dt_1 \cdots dt_{j-1} dt_{j+1} \cdots dt_n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$\sum_{i \neq k} \tau_{ki}(a_i - 1) - (a_k - 1) = -\sigma_k$$

则

时, 有

$$w_j(x_j) = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(x_1, \dots, x_n) \cdot W_j = \frac{1}{|\tau_{kj}|} W_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\prod_{i \neq j} x_i^{-a_i} dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n = x_j^{\sigma_j + \sum_{i \neq j} \tau_{ji}(a_i - 1)} W_j,$$

证明 根据 $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的性质, 有

$$w_j(x_j) = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} x_j^{\sigma_j} K(x_j^{\tau_{j1}} x_1, \dots, x_j^{\tau_{jj-1}} x_{j-1}, 1, x_j^{\tau_{jj+1}} x_{j+1}, \dots, x_j^{\tau_{jn}} x_n) \prod_{i \neq j} x_i^{-a_i} dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n =$$

$$x_j^{\sigma_j + \sum_{i \neq j} \tau_{ji}(a_i - 1)} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(u_1, \dots, u_{j-1}, 1, u_{j+1}, \dots, u_n) \prod_{i \neq j} u_i^{-a_i} du_1 \cdots du_{j-1} du_{j+1} \cdots du_n = x_j^{\sigma_j + \sum_{i \neq j} \tau_{ji}(a_i - 1)} W_j.$$

当 $k = 1$, 即

$$\sum_{i=2}^n \tau_{1i}(a_i - 1) - (a_1 - 1) = -\sigma_1$$

时, 若 $j \geq 2$, 则有

$$W_j = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} t_1^{\sigma_1} K(1, t_1^{\tau_{12}} t_2, \dots, t_1^{\tau_{1j-1}} t_{j-1}, t_1^{\tau_{1j}} t_j, t_1^{\tau_{1j+1}} t_{j+1}, \dots, t_1^{\tau_{1n}} t_n) \prod_{i \neq j} t_i^{-a_i} dt_1 \cdots dt_{j-1} dt_{j+1} \cdots dt_n =$$

$$\frac{1}{|\tau_{1j}|} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, u_2, \dots, u_n) u_2^{-a_2} \cdots u_{j-1}^{-a_{j-1}} u_j^{\frac{1}{\tau_{1j}} \left(\sum_{i \neq j} a_i \tau_{1i} - \sum_{i=2}^n \tau_{1i} - a_1 + \sigma_1 + 1 \right)} u_{j+1}^{-a_{j+1}} \cdots u_n^{-a_n} du_2 \cdots du_n =$$

$$\frac{1}{|\tau_{1j}|} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, u_2, \dots, u_n) \prod_{i=2}^n u_i^{-a_i} du_2 \cdots du_n = \frac{1}{|\tau_{1j}|} W_1.$$

类似可证当 $k \neq j$, $k = 2, 3, \dots, n$ 时, 有 $W_j = \frac{1}{|\tau_{kj}|} W_k$.时, $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是式 (6) 的最佳搭配参数, 即式 (6) 的最佳常数因子为 $\prod_{i=1}^n W_i^{1/p_i}$. 此时, 式 (6) 可化为

2 n 元泛齐次核 Hilbert 型重积分不等式最佳搭配参数的充要条件

定理 1 设

$$n \geq 3, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1 \quad (p_i > 1), \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

 $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元泛齐次非负可测函数, $r(A) = 1$, W_j 如式 (5) 所定义且都收敛.

1) 令

$$\alpha_i = a_i p_i - a_i + \sigma_i + \sum_{k \neq i} \tau_{ik}(a_k - 1),$$

则

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} K(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n |f_i(x_i)| dx_1 \cdots dx_n \leq \prod_{i=1}^n W_i^{1/p_i} \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i, \alpha_i}, \quad (6)$$

式中 $f_i(x_i) \in L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

2) 当且仅当

$$\sum_{i=2}^n \tau_{1i}(a_i - 1) - (a_1 - 1) = -\sigma_1$$

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} K(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n |f_i(x_i)| dx_1 \cdots dx_n \leq$$

$$W_k \prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{|\tau_{kj}|} \right)^{1/p_j} \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i, \alpha_i}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

证明 1) 根据 Hölder 不等式及引理 2, 有

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} K(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n |f_i(x_i)| dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} K(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n \left(x_j^{a_j} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{-a_i} \right)^{1/p_j} |f_j(x_j)| \right) dx_1 \cdots dx_n \leq$$

$$\prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbf{R}_+^n} x_j^{a_j p_j} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{-a_i} \right)^{p_j} |f_j(x_j)|^{p_j} K(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \right)^{1/p_j} =$$

$$\prod_{j=1}^n \left(\int_0^{+\infty} x_j^{a_j p_j - a_j} |f_j(x_j)|^{p_j} w_j(x_j) dx_j \right)^{1/p_j} =$$

$$\prod_{j=1}^n W_j^{1/p_j} \prod_{j=1}^n \left(\int_0^{+\infty} x_j^{a_j p_j - a_j + \sigma_j + \sum_{i \neq j} \tau_{ji}(a_i - 1)} |f_j(x_j)|^{p_j} dx_j \right)^{1/p_j} =$$

$$\prod_{i=1}^n W_i^{1/p_i} \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i, \alpha_i}.$$

故式 (6) 成立.

2) 先证充分性. 设

$$\sum_{i=2}^n \tau_{1i}(a_i - 1) - (a_1 - 1) = -\sigma_1,$$

根据引理 1, 有

$$\sum_{i \neq k} \tau_{ki}(a_i - 1) - (a_k - 1) = -\sigma_k, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

则

$$\alpha_i = a_i p_i - a_i + \sigma_i + \sum_{k \neq i} \tau_{ik}(a_k - 1) = a_i p_i - 1.$$

又根据引理 2, 有

$$W_j = \frac{1}{|\tau_{kj}|} W_k, \quad k \neq j, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

故

$$\prod_{i=1}^n W_i^{1/p_i} = \prod_{j=1}^n W_j^{1/p_j} = W_k^{1/p_k} \prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{|\tau_{kj}|} W_k \right)^{1/p_j} = W_k \prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{|\tau_{kj}|} \right)^{1/p_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

所以式(6)可化为式(7).

若式(6)的最佳常数因子不是

$$W_k \prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{|\tau_{kj}|} \right)^{1/p_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

则存在常数 $\bar{M}$, 使得

$$0 < \bar{M} < W_k \prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{|\tau_{kj}|} \right)^{1/p_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} K(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n |f_i(x_i)| dx_1 \cdots dx_n \leq \bar{M} \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i, a_i p_i - 1}.$$

为不失一般性, 设

$$0 < \bar{M} < W_1 \prod_{j=2}^n \left(\frac{1}{|\tau_{1j}|} \right)^{1/p_j} = W_1 \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{|\tau_{1i}|} \right)^{1/p_i}.$$

假设

$$\tau_{1i} < 0,$$

取 $\varepsilon, \delta > 0$, 且均充分小, 令

$$f_1(x_1) = \begin{cases} x_1^{-\frac{a_1 p_1 + \varepsilon}{p_1}}, & x_1 \geq 1, \\ 0, & 0 < x_1 < 1, \end{cases}$$

$$f_i(x_i) = \begin{cases} x_i^{-\left(a_i p_i + \frac{\varepsilon}{|\tau_{1i}|}\right)/p_i}, & x_i \geq \delta, \\ 0, & 0 < x_i < \delta, \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

则

$$\prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i, a_i p_i - 1} = \left(\int_1^{+\infty} x_1^{-1-\varepsilon} dx_1 \right)^{1/p_1} \prod_{i=2}^n \left(\int_\delta^{+\infty} x_i^{-1-\frac{\varepsilon}{|\tau_{1i}|}} dx_i \right)^{1/p_i} = \frac{1}{\varepsilon} \prod_{i=2}^n |\tau_{1i}|^{1/p_i} \delta^{-\frac{\varepsilon}{p_i |\tau_{1i}|}},$$

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} K(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n |f_i(x_i)| dx_1 \cdots dx_n = \int_1^{+\infty} x_1^{-1-\varepsilon} dx_1.$$

$$\left(\int_{\delta x_1^{1/2}}^{+\infty} \cdots \int_{\delta x_1^{1/2}}^{+\infty} K(1, t_2, \dots, t_n) \prod_{i=2}^n t_i^{-\left(a_i p_i + \frac{\varepsilon}{|\tau_{1i}|}\right)/p_i} dt_2 \cdots dt_n \right) dx_1 \geq \int_1^{+\infty} x_1^{-1-\varepsilon} dx_1.$$

$$\left(\int_\delta^{+\infty} \cdots \int_\delta^{+\infty} K(1, t_2, \dots, t_n) \prod_{i=2}^n t_i^{-\left(a_i p_i + \frac{\varepsilon}{|\tau_{1i}|}\right)/p_i} dt_2 \cdots dt_n \right) =$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_\delta^{+\infty} \cdots \int_\delta^{+\infty} K(1, t_2, \dots, t_n) \prod_{i=2}^n t_i^{-\left(a_i p_i + \frac{\varepsilon}{|\tau_{1i}|}\right)/p_i} dt_2 \cdots dt_n \right).$$

于是

$$\int_\delta^{+\infty} \cdots \int_\delta^{+\infty} K(1, t_2, \dots, t_n) \prod_{i=2}^n t_i^{-\left(a_i p_i + \frac{1}{|\tau_{1i}|}\varepsilon\right)/p_i} dt_2 \cdots dt_n \leq \bar{M} \prod_{i=2}^n |\tau_{1i}|^{1/p_i} \delta^{-\frac{\varepsilon}{p_i |\tau_{1i}|}}. \quad (8)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 利用 Fatou 引理, 有

$$\int_\delta^{+\infty} \cdots \int_\delta^{+\infty} K(1, t_2, \dots, t_n) \prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} dt_2 \cdots dt_n \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{M} \prod_{i=2}^n |\tau_{1i}|^{1/p_i} \delta^{-\frac{\varepsilon}{p_i |\tau_{1i}|}} = \bar{M} \prod_{i=2}^n |\tau_{1i}|^{1/p_i}.$$

再令 $\delta \rightarrow 0^+$, 得

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} K(1, t_2, \dots, t_n) \prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} dt_2 \cdots dt_n \leq \bar{M} \prod_{i=1}^n |\tau_{1i}|^{1/p_i}.$$

由此可得

$$\bar{M} \geq W_1 \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{|\tau_{1i}|} \right)^{1/p_i}.$$

这与

$$0 < \bar{M} < W_1 \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{|\tau_{1i}|} \right)^{1/p_i}$$

矛盾.

类似可证 $\tau_{1i} > 0, i = 2, 3, \dots, n$ 的情形.

综上所述, 可知

$$W_k \prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{|\tau_{kj}|} \right)^{1/p_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

是式(6)的最佳常数因子.

2) 下证必要性. 若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是式(6)的最佳搭配参数, 即式(6)的常数因子 $\prod_{i=1}^n W_i^{1/p_i}$ 是最佳的.

令

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= -1, \\ \sum_{i=2}^n \tau_{1i}(a_i - 1) - (a_1 - 1) - (-\sigma_1) &= \\ \sum_{i=1}^n \tau_{1i}(a_i - 1) - (-\sigma_1) &= c, \\ a_i' &= a_i - \frac{c}{\tau_{1i}p_i},\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \tau_{1i}(a_i' - 1) - (-\sigma_1) &= \\ \sum_{i=1}^n \tau_{1i}\left(a_i - \frac{c}{\tau_{1i}p_i} - 1\right) - (-\sigma_1) &= 0.\end{aligned}\quad (9)$$

由引理 1 可得

$$\sum_{i=1}^n \tau_{ki}(a_i' - 1) - (-\sigma_k) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (10)$$

当 $j \geq 2$ 时, 求解易得

$$\begin{aligned}W_j &= \frac{1}{|\tau_{1j}|} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) t_j^{c/\tau_{1j}} dt_2 \cdots dt_n, \\ \alpha_i &= a_i p_i - a_i + \sigma_i + \sum_{k \neq i} \tau_{ik}(a_k - 1) = \\ a_i' p_i - a_i' + \sigma_i + \sum_{k \neq i} \tau_{ik}(a_k' - 1) &= a_i' p_i - 1.\end{aligned}$$

故式(6)可等价于

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n |f_i(x_i)| dx_1 \cdots dx_n &\leq W_1^{1/p_1} \cdot \\ \prod_{j=2}^n \left(\frac{1}{|\tau_{1j}|} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) t_j^{c/\tau_{1j}} dt_2 \cdots dt_n \right)^{1/p_j} &\cdot \\ \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i, a_i' p_i - 1} &\cdot\end{aligned}\quad (11)$$

因为式(6)的常数因子是最佳的, 故式(11)的最佳常数因子为

$$W_1^{1/p_1} \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{|\tau_{1i}|} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) t_i^{c/\tau_{1i}} dt_2 \cdots dt_n \right)^{1/p_i}.$$

根据式(9)和充分性的证明, 可知式(11)的最佳常数因子为

$$\begin{aligned}W_1' \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{|\tau_{1i}|} \right)^{1/p_i} &= \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{|\tau_{1i}|} \right)^{1/p_i} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \cdot \\ \prod_{i=2}^n t_i^{-a_i'} dt_2 \cdots dt_n &= \\ \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{|\tau_{1i}|} \right)^{1/p_i} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{\frac{c}{\tau_{1i}p_i}} \right) dt_2 \cdots dt_n,\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{\frac{c}{\tau_{1i}p_i}} \right) dt_2 \cdots dt_n &= \\ W_1^{1/p_1} \prod_{j=2}^n \left(\int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) t_j^{c/\tau_{1j}} dt_2 \cdots dt_n \right)^{1/p_j} &\cdot\end{aligned}\quad (12)$$

针对

$$1, t_2^{\frac{c}{\tau_{12}p_2}}, \dots, t_n^{\frac{c}{\tau_{1n}p_n}},$$

应用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{\frac{c}{\tau_{1i}p_i}} \right) dt_2 \cdots dt_n &\leq \\ \left(\int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) dt_2 \cdots dt_n \right)^{1/p_1} &\cdot \\ \prod_{j=2}^n \left(\int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) t_j^{c/\tau_{1j}} dt_2 \cdots dt_n \right)^{1/p_j} &= \\ W_1^{1/p_1} \prod_{j=2}^n \left(\int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, \dots, t_n) \left(\prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} \right) t_j^{c/\tau_{1j}} dt_2 \cdots dt_n \right)^{1/p_j} &\cdot\end{aligned}\quad (13)$$

根据式(12)和(13)及 Hölder 不等式取等号的条件有

$$t_j^{c/\tau_{1j}} = \text{常数}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

从而 $c = 0$.

此即

$$\sum_{i=2}^n \tau_{1i}(a_i - 1) - (a_1 - 1) - (-\sigma_1) = 0.$$

同时, 由充分性证明可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n |f_i(x_i)| dx_1 \cdots dx_n &\leq \\ W_k \prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{|\tau_{kj}|} \right)^{1/p_j} \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i, a_i p_i - 1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

即式(6)可化为式(7).

3 n 元泛齐次核有界重积分算子范数的等价条件

设

$$\begin{aligned}n &\geq 3, \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} &= 1 \quad (p_i > 1), \\ q_n &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i} \right)^{-1}, \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

定义 $L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty)$ 的乘积空间^[7] 为

$$\prod_{i=1}^{n-1} L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty) =$$

$$\{(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}): f_i(x_i) \in L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty), i = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

在此乘积空间上定义重积分算子 T , 即

$$T(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})(x_n) = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) dx_1 \cdots dx_{n-1}. \quad (14)$$

利用 $\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = 1$, 并根据 Hilbert 型积分不等式理论^[14], 可知式(6)等价于

$$\|T(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})\|_{q_n, \alpha_n(1-q_n)} \leq \prod_{i=1}^n W_i^{1/p_i} \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{p_i, \alpha_i}.$$

于是由定理 1, 得到关于加权 Lebesgue 空间中 n 元泛齐次核重积分算子 T 的定理 2.

定理 2 设

$$\begin{aligned} n &\geq 3, \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} &= 1, \quad p_i > 1, \\ q_n &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i}\right)^{-1}, \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

$K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元泛齐次非负可测函数, $r(\mathbf{A}) = 1$, W_j 如式(5)定义且都收敛, 积分算子 T 由式(14)定义.

1) 令

$$\alpha_i = \sum_{k \neq i} \tau_{ik}(a_k - 1) - (a_i - 1) + \sigma_i + a_i p_i - 1,$$

则 T 是从

$$\prod_{i=1}^{n-1} L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty)$$

到

$$L_{q_n}^{\alpha_n(1-q_n)}(0, +\infty)$$

的有界算子, 且其范数为

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(f_1, \dots, f_{n-1})\|_{q_n, \alpha_n(1-q_n)}}{\prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{p_i, \alpha_i}} : (f_1, \dots, f_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty) \right\} \leq \prod_{i=1}^n W_i^{1/p_i}.$$

2) 当且仅当

$$\sum_{i=2}^n \tau_{1i}(a_i - 1) - (a_1 - 1) = -\sigma_1$$

时, T 的算子范数为

$$\|T\| = W_k \prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{\tau_{kj}} \right)^{1/p_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

推论 设

$$\begin{aligned} n &\geq 3, \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} &= 1, \quad p_i > 1, \end{aligned}$$

$$q_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i}\right)^{-1},$$

$$\lambda_i \lambda_j > 0, \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad \frac{1}{\lambda_i}(1 - a_i) > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

积分算子为

$$T(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})(x_n) = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} \exp\left(-x_1^{\lambda_1} \sum_{i=2}^n x_i^{\lambda_i}\right) \prod_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

令

$$\alpha_i = \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i}(a_i - 1) - (a_1 - 1) + a_i p_i - 1,$$

当且仅当

$$\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i}(a_i - 1) - (a_1 - 1) = 0$$

时, T 是从

$$\prod_{i=1}^{n-1} L_{p_i}^{\alpha_i}(0, +\infty)$$

到

$$L_{q_n}^{\alpha_n(1-q_n)}(0, +\infty)$$

的有界算子, 且其范数为

$$\|T\| = \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^{1/p_i-1} \prod_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{1}{\lambda_i}(1 - a_i)\right).$$

证明 令

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp\left(-x_1^{\lambda_1} \sum_{i=2}^n x_i^{\lambda_i}\right), \quad x_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则 n 元泛齐次非负函数 $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的参数矩阵为

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\lambda_1}{\lambda_2} & \cdots & \frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}} & \frac{\lambda_1}{\lambda_n} & 0 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} & -1 & \cdots & -\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_1} & -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_2} & \cdots & -1 & -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} & 0 \\ \frac{\lambda_n}{\lambda_1} & -\frac{\lambda_n}{\lambda_2} & \cdots & -\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

满足 $r(\mathbf{A}') = 1$.

考虑

$$W_1 = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} K(1, t_2, t_3, \dots, t_n) \prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} dt_2 dt_3 \cdots dt_n =$$

$$\int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} \exp\left(-\sum_{i=2}^n t_i^{\lambda_i}\right) \prod_{i=2}^n t_i^{-a_i} dt_2 dt_3 \cdots dt_n =$$

$$\prod_{i=2}^n \int_0^{+\infty} \exp(-t_i^{\lambda_i}) t_i^{-a_i} dt_i = \prod_{i=2}^n \frac{1}{|\lambda_i|} \prod_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{1}{\lambda_i} (1-a_i)\right),$$

因为

$$\frac{1}{\lambda_i} (1-a_i) > 0, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

所以 W_1 收敛, 由引理 2, 可知 $W_j, j = 2, 3, \dots, n$, 皆收敛.

又因为

$$\sigma_1 = 0, \tau_{1i} = \frac{\lambda_1}{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, n,$$

则

$$\sum_{i=2}^n \tau_{1i} (a_i - 1) - (a_1 - 1) = -\sigma_1 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} (a_i - 1) - (a_1 - 1) = 0.$$

根据定理 2 和上述过程, 可知推论成立.

4 参考文献

- [1] Hardy G H. Note on a theorem of Hilbert concerning series of positive terms[J]. [Proceedings of the London Mathematical Society](#), 1925, 23: 45
- [2] Xu L Z, Guo Y K. Note on Hardy-Riesz's extension of Hilbert's inequality[J]. [Chinese Quart J Math](#), 1991, 6: 75
- [3] Kuang J C. NOTE on new extensions of Hilbert's integral inequality[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 1999, 235(2): 608
- [4] Yang B C. On new generalizations of Hilbert's inequality[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 2000, 248(1): 29
- [5] 洪勇. Hardy-Hilbert 积分不等式的全方位推广 [J]. [数学学报](#), 2001, 44(4): 619
- [6] Yang B C. On an extended multiple Hardy-Hilbert's integral inequality[J]. [Tamsui Oxford J Math Sci](#), 2005, 21: 157
- [7] 洪勇, 陈强. 广义齐次核重积分算子最佳搭配参数的等价条件及应用 [J]. [中国科学: 数学](#), 2023, 53(5): 717
- [8] 洪勇. 带对称齐次核的级数算子的范数刻画及其应用 [J]. [数学学报\(中文版\)](#), 2008, 51(2): 365
- [9] He B, Hong Y, Li Z. Conditions for the validity of a class of optimal Hilbert type multiple integral inequalities with nonhomogeneous kernels[J]. [Journal of Inequalities and Applications](#), 2021, 2021(1): 64
- [10] Yang B C. On best extensions of Hardy-Hilbert's inequality with two parameters[J]. [J Inequal Pure Appl Math](#), 2005, 6: 81
- [11] 洪勇, 吴春阳, 陈强. 一类非齐次核的最佳 Hilbert 型积分不等式的搭配参数条件 [J]. [吉林大学学报\(理学版\)](#), 2021, 59(2): 207
- [12] Yang B C. On an extension of Hilbert's integral inequality with some parameters[J]. [Aust J Math Anal Appl](#), 2004, 1: 1
- [13] Rassias M T, Yang B C, Raigorodskii A. Equivalent properties of two kinds of hardy-type integral inequalities[J]. [Symmetry](#), 2021, 13(6): 1006
- [14] 洪勇, 和炳. Hilbert 型不等式的理论与应用: 上册 [M]. 北京: 科学出版社, 2023
- [15] Xu J S. Hardy-Hilbert's inequalities with two parameters[J]. [Adv Math](#), 2007, 36: 189
- [16] Yang B C. On Hilbert's integral inequality[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 1998, 220(2): 778
- [17] 洪勇. 具有齐次核的 Hilbert 型积分不等式的构造特征及应用 [J]. [吉林大学学报\(理学版\)](#), 2017, 55(2): 189
- [18] Hong Y, Huang Q L, Yang B C, et al. The necessary and sufficient conditions for the existence of a kind of Hilbert-type multiple integral inequality with the non-homogeneous kernel and its applications[J]. [Journal of Inequalities and Applications](#), 2017, 2017(1): 316
- [19] 洪勇. 加权 Lebesgue 空间中超齐次核有界积分算子的构造条件及范数计算公式 [J]. [中国科学: 数学](#), 2025, 55(4): 791
- [20] Wang A Z, Yang B C. Equivalent statements of a Hilbert-type integral inequality with the extended Hurwitz Zeta function in the whole plane[J]. [Journal of Mathematical Inequalities](#), 2007(4): 1039
- [21] Liao J Q, Hong Y, Yang B C. Equivalent conditions of a Hilbert-type multiple integral inequality holding[J]. [Journal of Function Spaces](#), 2020, 2020(1): 3050952
- [22] Rassias M T, Yang B C, Raigorodskii A. On a more accurate reverse Hilbert-type inequality in the whole plane[J]. [Journal of Mathematical Inequalities](#), 2007(4): 1359

n -Variable pan-homogeneous kernel multiple integral operator: equivalent conditions for optimal matching parameters and applications

Li Zhen¹⁾, Li Siqian¹⁾, Deng Guantie²⁾, Kong Yinying¹⁾

(1) School of Statistics and Data Science, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou, Guangdong, China;

2) School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, China)

Abstract In this paper, we introduce the concept of n -variable pan-homogeneous functions, to unify homogeneous functions, generalized homogeneous functions and a class of non-homogeneous functions. With this weight function method, we investigate optimal matching parameters for Hilbert-type multiple integral inequalities with n -variable pan-homogeneous kernels, and establish both necessary and sufficient conditions as well as expressions for best constant factor. We further provide equivalent conditions for optimal matching parameters of corresponding multiple integral operators T and expressions for operator norm. We discuss boundedness and norm calculation for non-homogeneous kernel multiple integral operator in the form $\exp(-x_1^{l_1} \sum_{i=2}^n x_i^{l_i})$.

Keywords n -variable pan-homogeneous kernel; Hilbert-type multiple integral inequality; weighted Lebesgue space; optimal matching parameters; operator norm; n -variable exponential coupling kernel

【责任编辑: 陆有忠】