山西大学学报(自然科学版)49(4):624—631,2026
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2026021

Kelvin-Voigt阻尼的梁-弦-梁传输系统的稳定性分析

崔佳楠[1],柴树根[2*],白晋彦[1]
(1.晋中学院 数学系,山西 晋中 030619;
2.山西大学 数学与统计学院,山西 太原 030006)

摘 要:梁-弦-梁结构在大跨度空间建筑、航空航天柔性连接件等工程领域具有重要且广泛的应用价值。本文研究梁-弦-梁传输系统的稳定性,两个无阻尼梁通过传输条件与一个内部带Kelvin-Voigt(K-V)阻尼的弦相耦合。通过频域分析证明了系统的解达不到指数稳定,利用频域法与乘子法建立了最优的多项式衰减率。研究结果表明仅存在于弦内部的K-V阻尼仅能使得整个系统多项式稳定,这为梁-弦-梁结构的稳定性提供了理论参考。

关键词:传输问题;局部Kelvin-Voigt阻尼;多项式衰减率;梁-弦方程
中图分类号:O29 **文献标志码**:A **文章编号**:0253-2395(2026)04-0624-08

Analysis of Stability of a Beam-String-Beam Transmission System with Kelvin-Voigt Damping

Cui Jianan[1], Chai Shugen[2*], Bai Jinyan[1]
(1. *Department of Mathematics, Jinzhong University, Jinzhong* 030619*, China;*
2. *School of Mathematics and Statistics, Shanxi University, Taiyuan* 030006*, China*)

Abstract: The beam-string-beam structure possesses significant and extensive application value in engineering fields such as long-span spatial buildings and flexible connectors in aerospace engineering. This paper investigates the stability of a beam-string-beam transmission system, in which two undamped beams are coupled with a string internally equipped with Kelvin-Voigt (K-V) damping via transmission conditions. It is proved by frequency-domain analysis that the system fails to achieve exponential stability, and the optimal polynomial decay rate is established by combining the frequency-domain method and the multiplier method. The results show that the K-V damping existing only in the string can merely render the whole system polynomially stable, which provides a theoretical reference for the stability analysis of beam-string-beam structures.

Key words: transmission problem; local Kelvin-Voigt damping; polynomial decay rate; beam-string equation

0 引言

稳定性是分布参数控制理论的重要课题,主要研究在不同控制器下振动系统的能量衰减规律。在现代工程中,结构振动抑制一直是难点问题,传统主动控制依赖复杂传感与执行机制,成本高、维护不便,很多时候采用智能材料的被动控制更具优势。其中,Kelvin-Voigt(K-V)黏弹性模型应用广泛,也受到了学者们的广泛关注[1-5]。

收稿日期:2026-01-25;**修回日期**:2026-04-15
基金项目:国家自然科学基金(12271316);山西省基础研究计划青年项目(202303021212266);晋中学院博士专项基金(23E00611)
作者简介:崔佳楠(1996—),女,山西长治人,博士,讲师,研究方向为分布参数控制理论。E-mail:cuijianan@jzxy.edu.cn
* **通信作者**:柴树根(Chai Shugen),E-mail:sgchai@sxu.edu.cn
引文格式:崔佳楠,柴树根,白晋彦.Kelvin-Voigt阻尼的梁-弦-梁传输系统的稳定性分析[J].山西大学学报(自然科学版),2026,49(4):624-631. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2026021.

带有K-V阻尼的弹性系统稳定性研究最早由Liu等[1]开展,其通过谱分析证明,全局阻尼下波动方程系统的解具有指数稳定性与解析性。而阻尼局部分布时,解的衰减速率会受到阻尼系数光滑程度、分布位置及空间区域特性等因素影响,见文献[2-4]。在高维情形下有学者利用频域法证明了如果阻尼系数平稳变化且阻尼区域与边界有交集,那么系统的解指数稳定[5]。指数稳定作为理想的稳定状态,意味着振动能量以指数速率快速衰减,但工程中阻尼不足(过载)、参数不确定等问题常使其难以实现,因此衰减率分析成为衡量系统稳定水平与优化控制策略的关键。近十五年间,半群理论在稳定性分析中取得重要突破,针对非指数稳定的系统,多项式衰减、对数衰减等频域刻画方法为系统的能量衰减研究提供了有效工具[6-7]。

近五年来,Ghader等[8]对带有局部K-V阻尼且阻尼系数在交界处非光滑的弹性弦,得到了相应系统解的最优衰减率为t^{-2};Rivera等[9-10]研究了有两段带阻尼的三段式杆件系统,证明了当且仅当本构关系不连续的K-V型黏弹性段不在杆件中间时,系统指数稳定,其余情形下以t^{-2}多项式衰减;Timoshenko梁上的类似结果见文献[11-12];Hassine[13-14]研究了带有局部K-V阻尼且阻尼系数在传输点附近有奇异性的弦/梁系统,证明相应半群具有与退化速度相关的多项式衰减率。对于带有局部K-V阻尼的弦-梁传输系统的稳定性问题,Hassine[15]得到了不论K-V阻尼局部分布于弦还是梁都达不到指数衰减。更多关于梁-弦传输系统的结果见文献[16-17]。梁-弦-梁系统作为柔性耦合振动结构的典型代表,广泛应用于桥梁拉索-主梁、大跨度桁架结构、航空航天柔性连接件等工程场景。最近,Martínez等[18-19]在梁-弦-梁系统中讨论了摩擦型与K-V型阻尼对传输系统解衰减率的影响。但以上文献并没有考虑仅在弦内部存在K-V阻尼的梁-弦-梁系统解的衰减率。

本文在Martínez等的工作基础上,旨在研究仅在弦内局部分布的K-V阻尼能否使得整个耦合梁-弦-梁系统的能量指数衰减;若达不到指数衰减,则进一步探究该系统的最优多项式衰减率。相关结果将为工程领域梁-弦-梁结构的振动控制问题提供重要的理论指导,提升结构的安全性能。

1 数学模型

考虑弹性结构由三部分构成:第一、三部分是无阻尼梁,分别对应开区间$I_1:=(0,l_1)$, $I_3:=(l_2,l_3)$;第二部分是弦,对应开区间$I_2:=(l_1,l_2)$,其中l_1,l_2,l_3是正实数且满足$0<l_1<l_2<l_3$。令$u=u(x,t)$,$v=v(x,t)$和$w=w(x,t)$分别表示在时刻t,梁、弦、梁上坐标为x的点的垂直位移,则该结构的数学模型为如下系统:

$$\begin{cases} u_{tt}+u^{(4)}=0, & (x,t)\in I_1\times(0,\infty),\\ v_{tt}-v''-(Kv'_t)'=0, & (x,t)\in I_2\times(0,\infty),\\ w_{tt}+w^{(4)}=0, & (x,t)\in I_3\times(0,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

其中非负函数$K\in L^{\infty}(I_2)$描述了K-V阻尼在弦上的分布情况,满足$K=k(x)\chi_{(\alpha,\beta)}$, $(\alpha,\beta)\subset(l_1,l_2)$且在$(\alpha,\beta)$内有$k(x)\geqslant k_0>0$。在梁的端点$0,l_3$上满足边界条件

$$u(0,t)=u'(0,t)=w(l_3,t)=w'(l_3,t)=0,\quad t\in(0,\infty)。 \tag{2}$$

在梁-弦交界点l_1,l_2满足以下的传输条件和边界条件

$$\begin{aligned} &u(l_1,t)=v(l_1,t), && t\in(0,\infty),\\ &v(l_2,t)=w(l_2,t), && t\in(0,\infty),\\ &u'''(l_1,t)+v'(l_1,t)=0, && t\in(0,\infty),\\ &w'''(l_2,t)+v'(l_2,t)=0, && t\in(0,\infty),\\ &u''(l_1,t)=w''(l_2,t)=0, && t\in(0,\infty), \end{aligned} \tag{3}$$

式(3)中第1个等式称为连续传输条件,第2、第3个等式表示梁的剪应力与弦的应力相互抵消,最后的等式描述了梁在l_1和l_2处可能存在拐点,这在物理上意味着在交界处没有弯矩。初值条件为

$$(u,u_t,v,v_t,w,w_t)|_{t=0}=(u_0,u_1,v_0,v_1,w_0,w_1)。 \tag{4}$$

2 准备工作及主要结果

令 $H=L^2(0,l_1)\times L^2(l_1,l_2)\times L^2(l_2,l_3)$, 其上范数为

$$\|U_2\|_H=\|(u_2,v_2,w_2)\|_H=$$
$$\left(\int_0^{l_1}|u_2|^2\mathrm{d}x+\int_{l_1}^{l_2}|v_2|^2\mathrm{d}x+\int_{l_2}^{l_3}|w_2|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

令

$$V=\{U_1=(u_1,v_1,w_1)\in H^2(0,l_1)\times H^1(l_1,l_2)\times H^2(l_2,l_3):\ u_1(l_1)=v_1(l_1),v_1(l_2)=w_1(l_2),\ u_1(0)=u_1'(0)=w_1(l_3)=w_1'(l_3)=0\},$$

其上范数为

$$\|U_1\|_V=\left(\int_0^{l_1}|u_1''|^2\mathrm{d}x+\int_{l_1}^{l_2}|v_1'|^2\mathrm{d}x+\int_{l_2}^{l_3}|w_1''|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}。$$

定义 $\mathcal{H}=V\times H$，其上范数为 $\|U\|_{\mathcal{H}}=\|(U_1,U_2)\|_{\mathcal{H}}=(\|U_1\|_V^2+\|U_2\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$，易知 $\mathcal{H}$ 是一个 Hilbert 空间。在 $\mathcal{H}$ 上定义线性无界算子 $\mathcal{A}$: $D(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 如下：

$$\mathcal{A}U=(u_2,v_2,w_2,-u_1^{(4)},(v_1'+Kv_2')',-w_1^{(4)}),$$

$$D(\mathcal{A})=\Big\{U\in\mathcal{H}\Big|\ u_1^{(4)}\in L^2(0,l_1),\ (v_1'+Kv_2')'\in L^2(l_1,l_2),\ w_1^{(4)}\in L^2(0,l_1),\ U_2\in V,u_1'''(l_1)+v_1'(l_1)=0,\ w_1'''(l_2)+v_1'(l_2)=0,\ u_1''(l_1)=w_1''(l_2)=0\Big\}。$$

系统(1)—(4)可以被写成 $\mathcal{H}$ 上的抽象发展方程

$$\begin{cases}U_t(t)=\mathcal{A}U(t),\ t>0,\\ U(0)=U_0,\end{cases}\tag{5}$$

此处的 $U=(u_1,v_1,w_1,u_t,v_t,w_t)$，$U_0=(u_0,v_0,w_0,u_1,v_1,w_1)$。

由 Lummer-Phillips 定理知，系统(5)是适定的。采用与文献[18]中定理 4.6 相同的证明方法，可证得 $\mathrm{i}\mathbb{R}\subset\rho(\mathcal{A})$，后面将在此结论的基础上展开研究。

命题 1 线性算子 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}$ 上可以生成一个 C_0-压缩半群 $e^{\mathcal{A}t}$。具体地，当 $U_0\in\mathcal{H}$ 时，存在唯一的温和解 $U\in C([0,+\infty);\mathcal{H})$；而当 $U_0\in D(\mathcal{A})$ 时，系统存在唯一的正则解 $U\in C([0,+\infty);D(\mathcal{A}))\cap C^1([0,+\infty);\mathcal{H})$。

更多的，半群 $e^{\mathcal{A}t}$ 是强稳定的，即

$$\lim_{t\to+\infty}\|e^{\mathcal{A}t}U_0\|_{\mathcal{H}}=0,\ \forall U_0\in\mathcal{H}。$$

本文的主要结果如下：

定理 1 对任意 $U_0\in\mathcal{H}$，系统(5)的解 $U=e^{t\mathcal{A}}U_0$ 满足下面的稳定性：

① 解达不到指数稳定；

② 解的最优多项式衰减率为 t^{-1}；即存在 $M>0$，使得对任意的 $t>0$，有

$$\|U\|_{\mathcal{H}}\leqslant\frac{M}{t}\|U_0\|_{D(\mathcal{A})},\ \forall U_0\in D(\mathcal{A})。$$

3 非指数稳定性

要证系统(1)—(4)的解不是指数稳定的，即证

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\|(\mathrm{i}\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}<\infty$$

不成立，为此只需要去证明存在一个序列 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$，$\lambda_n\to\infty(n\to\infty)$，及一个有界序列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ 使得

$$\|(\mathrm{i}\lambda I-\mathcal{A})^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}}\to\infty(n\to\infty)。\tag{6}$$

令 $n\in\mathbb{N}$ 且 $\lambda:=\lambda_n:=\dfrac{2n\pi}{l_2-\beta}$，取 $k(x)=k_0$，$x\in(\alpha,\beta)$。在 $(0,l_3)$ 上定义如下两个函数

$$f(x):=f_n(x):=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\sin(\lambda(x-l_2)), & \beta<x<l_2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$g(x):=g_n(x):=\begin{cases}\cos(\lambda(x-l_2)), & \beta<x<l_2,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$$

易知

$$F_n:=\left(0,\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda(x-l_1))\chi_{(\beta,l_2)},0,0,\cos(\lambda(x-l_1))\chi_{(\beta,l_2)},0\right)\subset\mathcal{H},$$

则存在唯一的

$$U_n=(u_1^n,v_1^n,w_1^n,u_2^n,v_2^n,w_2^n)\subset D(\mathcal{A})$$

使得 $(\mathrm{i}\lambda I-\mathcal{A})U_n=F_n$，即

$$\begin{cases}\mathrm{i}\lambda u_1^n-u_2^n=0,\\ \mathrm{i}\lambda v_1^n-v_2^n=\dfrac{1}{\lambda}\sin(\lambda(x-l_1))\chi_{(\beta,l_2)},\\ \mathrm{i}\lambda w_1^n-w_2^n=0,\\ \mathrm{i}\lambda u_2^n+(u_1^n)^{(4)}=0,\\ \mathrm{i}\lambda v_2^n-(T^n)'=\cos(\lambda(x-l_1))\chi_{(\beta,l_2)},\\ \mathrm{i}\lambda w_2^n+(w_1^n)^{(4)}=0,\end{cases}$$

其中 $T^n=(v_1^n)'+K(v_2^n)'$。

对 $x\in(0,l_1)$，可以视为去解

$$\begin{cases}\mathrm{i}\lambda u_1^n-u_2^n=0,\\ \mathrm{i}\lambda u_2^n+(u_1^n)^{(4)}=0。\end{cases}\tag{7}$$

式(7)的解为

$$u_1^n(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda}(x-l_1)}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}(x-l_1)}+C_3e^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}(x-l_1)}+C_4e^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}(x-l_1)},$$

代入 $x=0$ 处的边界条件 $u_1^n(0)=(u_1^n)'(0)=0$

可得

$$C_1e^{-\gamma}+C_2e^{\gamma}+C_3e^{-\mathrm{i}\gamma}+C_4e^{\mathrm{i}\gamma}=0,\tag{8}$$

$$C_1e^{-\gamma}-C_2e^{\gamma}+\mathrm{i}C_3e^{-\mathrm{i}\gamma}-\mathrm{i}C_4e^{\mathrm{i}\gamma}=0,\tag{9}$$

其中

$$\gamma:=\gamma_n:=\sqrt{\lambda}\,l_1。$$

对$x\in(l_1,\alpha)$,可以视为去解

$$\begin{cases}\mathrm{i}\lambda v_1^n-v_2^n=0,\\ \mathrm{i}\lambda v_2^n-(v_1^n)''=0,\end{cases}$$

易解得

$$v_1^n(x)=C_5e^{\mathrm{i}\lambda(x-l_1)}+C_6e^{-\mathrm{i}\lambda(x-l_1)},$$

利用$x=l_1$处的传输条件和边界条件

$$\begin{cases}u_1^n(l_1)=v_1^n(l_1),\\ (u_1^n)'''(l_1)=-(v_1^n)'(l_1),\\ (u_1^n)''(l_1)=0,\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}C_5+C_6=C_1+C_2+C_3+C_4,&(10a)\\ C_1+C_2-C_3-C_4=0,&(10b)\\ \sqrt{\lambda}\,(C_1-C_2-\mathrm{i}C_3+\mathrm{i}C_4)=\mathrm{i}(C_5-C_6)。&(10c)\end{cases}$$

将式(10a)(10b)与式(8)(9)联立可解出

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{[1+e^{\gamma}(\cos\gamma-\sin\gamma)](C_5+C_6)}{4(\cos\gamma\sinh\gamma-\sin\gamma\cosh\gamma)},\\ C_2=\dfrac{[1+e^{-\gamma}(\cos\gamma+\sin\gamma)](C_5+C_6)}{4(\cos\gamma\sinh\gamma-\sin\gamma\cosh\gamma)},\\ C_3=\dfrac{[\mathrm{i}+e^{\mathrm{i}\gamma}(\sinh\gamma+\cosh\gamma)](C_5+C_6)}{4(\cos\gamma\sinh\gamma-\sin\gamma\cosh\gamma)},\\ C_4=\dfrac{[\mathrm{i}+e^{-\mathrm{i}\gamma}(\sinh\gamma-\cosh\gamma)](C_5+C_6)}{4(\cos\gamma\sinh\gamma-\sin\gamma\cosh\gamma)}。\end{cases}\tag{11}$$

再将(11)代入(10c)可得

$$\frac{1+\cos\gamma\cosh\gamma}{\sin\gamma\cosh\gamma-\cos\gamma\sinh\gamma}(C_5+C_6)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\lambda}}(C_5-C_6)。\tag{12}$$

对$x\in(\alpha,\beta)$,可以视为去解

$$\begin{cases}\mathrm{i}\lambda v_1^n-v_2^n=0,\\ \mathrm{i}\lambda v_2^n-(1+\mathrm{i}\lambda k_0)(v_1^n)''=0,\end{cases}$$

又可转化为

$$(v_1^n)''+\kappa^2v_1^n=0,\tag{13}$$

其中$\kappa^2=\dfrac{\lambda^2}{1+\mathrm{i}\lambda k_0}$,做一个变形可写为

$$\kappa^2=\frac{\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2k_0^2}}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

此处$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2k_0^2}}$,$\sin\theta=\dfrac{-k_0\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2k_0^2}}$。易得式(13)的解为

$$v_1^n(x)=C_7e^{\mu(x-\alpha)}+C_8e^{-\mu(x-\alpha)},\tag{14}$$

此处的$\mu=\mathrm{i}\kappa=\dfrac{\lambda}{\sqrt[4]{1+\lambda^2k_0^2}}\left(\mathrm{i}\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$。由式(14)易得

$$\begin{cases}v_1^n(\beta^-)=C_7e^{\mu(\beta-\alpha)}+C_8e^{-\mu(\beta-\alpha)},\\ (1+\mathrm{i}\lambda k_0)(v_1^n)'(\beta^-)=\\ \qquad\mu(1+\mathrm{i}\lambda k_0)(C_7e^{\mu(\beta-\alpha)}-C_8e^{-\mu(\beta-\alpha)})。\end{cases}$$

再利用v_1^n在$x=\alpha$处的连续性

$$\begin{cases}v_1^n(\alpha^-)=v_1^n(\alpha^+),\\ (v_1^n)'(\alpha^-)=(1+\mathrm{i}\lambda k_0)(v_1^n)'(\alpha^+),\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}C_7+C_8=C_5e^{\mathrm{i}\lambda(\alpha-l_1)}+C_6e^{-\mathrm{i}\lambda(\alpha-l_1)},\\ C_7-C_8=\dfrac{\mathrm{i}\lambda}{\mu(1+\mathrm{i}\lambda k_0)}(C_5e^{\mathrm{i}\lambda(\alpha-l_1)}-C_6e^{-\mathrm{i}\lambda(\alpha-l_1)})。\end{cases}\tag{15}$$

对$x\in(\beta,l_2)$,可视为去解

$$\begin{cases}\mathrm{i}\lambda v_1^n-v_2^n=\dfrac{1}{\lambda}\sin(\lambda(x-l_2)),\\ \mathrm{i}\lambda v_2^n-(v_1^n)''=\cos(\lambda(x-l_2))。\end{cases}\tag{16}$$

令$z_{\pm}(x)=\dfrac{1}{2}\big(v_2^n(x)\pm(v_1^n)'(x)\big)$,$\forall x\in(\beta,l_2)$,则式(16)可以被转化为$(\beta,l_2)$上的一阶非齐次系统

$$\begin{pmatrix}z^+\\ z^-\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\lambda&0\\ 0&-\mathrm{i}\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^+\\ z^-\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\cos(\lambda(x-l_2)),$$

可解出

$$\begin{cases}z_+(x)=z_+(l_2)e^{\mathrm{i}\lambda(x-l_2)}-\dfrac{1}{2}(x-l_2)e^{\mathrm{i}\lambda(x-\beta)}-\\ \qquad\dfrac{1}{2\lambda}e^{\mathrm{i}\lambda(\beta-l_2)}\sin(\lambda(x-l_2)),\\ z_-(x)=-z_+(l_2)e^{-\mathrm{i}\lambda(x-l_2)},\end{cases}$$

由此又可得

$$\begin{aligned}v_1^n(\beta^+)&=z_+(\beta^+)+z_-(\beta^+)=\frac{1}{2}(l_2-\beta),\\ (v_1^n)'(\beta^+)&=z_+(\beta^+)-z_-(\beta^+)=\\ &\quad 2z_+(l_2)+\frac{1}{2}(l_2-\beta)。\end{aligned}\tag{17}$$

再利用v_1^n在$x=\beta$处的连续性

$$\begin{cases}v_1^n(\beta^-)=v_1^n(\beta^+),\\ (v_1^n)'(\beta^+)=(1+\mathrm{i}\lambda k_0)(v_1^n)'(\beta^-),\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} C_7=\dfrac{1}{2}e^{-\mu(\beta-\alpha)}[\,v_1^n(\beta)+\dfrac{(v_1^n)'(\beta)}{\mu}(1+\mathrm{i}\lambda k_0)\,], \\ C_8=\dfrac{1}{2}e^{\mu(\beta-\alpha)}[\,v_1^n(\beta)-\dfrac{(v_1^n)'(\beta)}{\mu}(1+\mathrm{i}\lambda k_0)\,]。 \end{cases} \tag{18}$$

将(18)代入(15)可以解出

$$\begin{cases} C_5=\dfrac{1}{2\cos(\lambda(\alpha-l_1))}\,[\,J_1-\dfrac{\mu}{\mathrm{i}\lambda(1+\mathrm{i}\lambda k_0)}J_2\,]+ \\ \qquad\dfrac{\mu}{\mathrm{i}\lambda(1+\mathrm{i}\lambda k_0)}J_2, \\ C_6=\dfrac{1}{2\cos(\lambda(\alpha-l_1))}\,[\,J_1-\dfrac{\mu}{\mathrm{i}\lambda(1+\mathrm{i}\lambda k_0)}J_2\,], \end{cases} \tag{19}$$

此处

$$J_1=v_1^n(\beta)\cosh(\mu(\beta-\alpha))-\frac{1}{1+\mathrm{i}\lambda k_0}(v_1^n)'(\beta)\sinh(\mu(\beta-\alpha)),$$

$$J_2=-v_1^n(\beta)\sinh(\mu(\beta-\alpha))+\frac{1}{1+\mathrm{i}\lambda k_0}(v_1^n)'(\beta)\cosh(\mu(\beta-\alpha))。$$

由式(19)和(12),得

$$\frac{(v_1^n)'(\beta)}{v_1^n(\beta)}=\mu(1+\mathrm{i}\lambda k_0)\cdot\frac{J_3(J_4+J_5)+\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{\lambda}}(J_5-J_4)}{J_3(J_5-J_4)+\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{\lambda}}(J_4+J_5)}, \tag{20}$$

其中

$$J_3=\frac{1+\cos\gamma\cosh\gamma}{\sin\gamma\cosh\gamma-\cos\gamma\sinh\gamma},$$

$$J_4=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\mu(1+\mathrm{i}\lambda k_0)}{\mathrm{i}\lambda}\right)e^{-[\mathrm{i}\lambda(\alpha-l_1)+\mu(\beta-\alpha)]},$$

$$J_5=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\mu(1+\mathrm{i}\lambda k_0)}{\mathrm{i}\lambda}\right)e^{\mathrm{i}\lambda(\alpha-l_1)+\mu(\beta-\alpha)}。$$

根据式(17)(20)得

$$|z_+(l_2)|\geqslant\frac{1}{4}\left|k_0-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\right|\left|\mu(1+\mathrm{i}\lambda k_0)\right|\cdot\left|\frac{|J_3(J_4+J_5)|-\left|\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{\lambda}}\right||J_5-J_4|}{|J_3(J_5-J_4)|+\left|\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{\lambda}}\right||J_4+J_5|}\right|。 \tag{21}$$

由λ_n,μ_n,γ_n的定义,当$n\to\infty$时,则有

$$\lambda_n,\mu_n,\gamma_n\to\infty。$$

因此,

$$|z_+(l_2)|\to\infty,\ n\to\infty。 \tag{22}$$

再利用不等式$|z_1-z_2|^2\geqslant\frac{1}{2}|z_1|^2-|z_2|^2$, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$,有

$$|v_1^n(x)|^2\geqslant\left(|z_+(l_2)|^2-\frac{1}{8\lambda^2}\right)\sin^2(\lambda(x-l_2))-\frac{1}{4}(x-l_2)^2,\ \forall x\in(\beta,l_2),$$

结合式(22)可得

$$\int_\beta^{l_2}|v_1^n(x)|^2\mathrm{d}x\to\infty,\ n\to\infty,$$

因此式(6)成立,证毕。

4 多项式衰减率估计

本节将证明系统(1)—(4)的解的最优多项式衰减率为t^{-1},根据Borichev和Tomilov在文献[7]中的定理2.4的结论,只需验证

$$\sup\{|\lambda|^{-1}\|(\mathrm{i}\lambda-\mathcal{A})\|^{-1};\lambda\in\mathbb{R}\}<+\infty。 \tag{23}$$

利用反证法,先假设式(23)不成立,根据预解算子的连续性和共鸣定理,存在

$$\{\lambda_n\}\subset\mathbb{R},$$

$$\{U_n\}=\{(u_1^n,v_1^n,w_1^n,u_2^n,v_2^n,w_2^n)\}\subset D(\mathcal{A}),\quad n=1,2,\cdots,$$

使得

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}}=1,\ \lambda_n\to+\infty,$$

且

$$\lambda_n(\mathrm{i}\lambda_n-\mathcal{A})U_n=F_n=(f_1^n,f_2^n,f_3^n,g_1^n,g_2^n,g_3^n)\to0, \tag{24}$$

即

$$\begin{cases} \lambda_n(\mathrm{i}\lambda_n u_1^n-u_2^n)=f_1^n\to0, & (\mathrm{a}) \\ \lambda_n(\mathrm{i}\lambda_n v_1^n-v_2^n)=f_2^n\to0, & (\mathrm{b}) \\ \lambda_n(\mathrm{i}\lambda_n w_1^n-w_2^n)=f_3^n\to0, & (\mathrm{c}) \\ \lambda_n(\mathrm{i}\lambda_n u_2^n+(u_1^n)^{(4)})=g_1^n\to0, & (\mathrm{d}) \\ \lambda_n(\mathrm{i}\lambda_n v_2^n-(T^n)')=g_2^n\to0, & (\mathrm{e}) \\ \lambda_n(\mathrm{i}\lambda_n w_2^n+(w_1^n)^{(4)})=g_3^n\to0。 & (\mathrm{f}) \end{cases} \tag{25}$$

首先在区间(α,β)上考虑式(25)中(b)(e)。由式(24)可得

$$\lambda_n\int_\alpha^\beta k_0|(v_2^n)'|^2\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\langle\lambda_n(\mathrm{i}\lambda_n-\mathcal{A})U_n,U_n\rangle_{\mathcal{H}}\to0,(n\to\infty),$$

因此,

$$\int_\alpha^\beta |(v_2^n)'|^2 \mathrm{d}x = o(\lambda_n^{-1}),\ \int_\alpha^\beta |(v_1^n)'|^2 \mathrm{d}x = o(\lambda_n^{-3}), \tag{26}$$

$$\int_\alpha^\beta |T^n|^2 \mathrm{d}x = o(\lambda_n^{-1})。 \tag{27}$$

为了后面得到多项式衰减率,先给出以下两个引理。

引理1 函数 v_1^n 与 T^n 满足以下性质:

$$|T^n(\alpha^+)| = o(\lambda_n^{-\frac{1}{4}}),\ |T^n(\beta^-)| = o(\lambda_n^{-\frac{1}{4}}),$$
$$|v_1^n(\alpha^+)| = o(\lambda_n^{-\frac{3}{2}}),\ |v_1^n(\beta^-)| = o(\lambda_n^{-\frac{3}{2}})。$$

证明 根据式(25)中(b)可得

$$\begin{gathered}\lambda_n^{-1}\| \psi v_2^n\|_{H^1(\alpha,\beta)} = O(1),\\ \forall \psi \in C^\infty(0,l_3),\ \mathrm{supp}(\psi)\subset(\alpha,\beta)。\end{gathered} \tag{28}$$

用式(25)中(e)与 ψv_2^n 在 $L^2(\alpha,\beta)$ 上作内积,结合式(27)(28)有

$$\begin{gathered}\lambda_n\int_\alpha^\beta \psi |v_2^n|^2 \mathrm{d}x = o(1),\\ \forall \psi \in C^\infty(0,l_3),\mathrm{supp}(\psi)\subset(\alpha,\beta)。\end{gathered} \tag{29}$$

再利用插值定理式(26)和(29)可得

$$\| v_2^n\|_{H^1(\alpha,\beta)} = o\left(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\right)。 \tag{30}$$

将式(25)中(e)与 v_2^n 在 $L^2(\alpha,\beta)$ 上作内积

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta g_2^n \overline{v}_2^n \mathrm{d}x = \mathrm{i}\lambda_n^2\int_\alpha^\beta |v_2^n|^2 \mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta \lambda_n T^n \overline{v}_2^n \mathrm{d}x +\\ \lambda_n T^n(\alpha^+)\overline{v}_2^n(\alpha^+) - \lambda_n T^n(\beta^-)\overline{v}_2^n(\beta^-)。\end{aligned} \tag{31}$$

利用插值不等式,式(25)中(e),式(27)和(30)去估计式(31)右边第三项有

$$\begin{aligned}&\left|\lambda_n T^n(\alpha^+)\overline{v}_2^n(\alpha^+)\right| \leqslant\\ &C\lambda_n \| T^n\|_{L^2(\alpha,\beta)}^{\frac{1}{2}} \|(T^n)'\|_{L^2(\alpha,\beta)}^{\frac{1}{2}} \| v_2^n\|_{L^2(\alpha,\beta)}^{\frac{1}{2}} \|(v_2^n)'\|_{L^2(\alpha,\beta)}^{\frac{1}{2}} =\\ &C\| \lambda_n^{\frac{1}{2}} T^n\|_{L^2(\alpha,\beta)}^{\frac{1}{2}} \| \lambda_n v_2^n\|_{L^2(\alpha,\beta)}^{\frac{1}{2}} \| \lambda_n^{\frac{1}{2}}(v_2^n)'\|_{L^2(\alpha,\beta)}^{\frac{1}{2}} =\\ &o(1)(1+\| \lambda_n v_2^n\|_{L^2(\alpha,\beta)})。\end{aligned} \tag{32}$$

同理有

$$\left|\lambda_n T^n(\beta^-)\overline{v}_2^n(\beta^-)\right| \leqslant o(1)(1+\| \lambda_n v_2^n\|_{L^2(\alpha,\beta)})。 \tag{33}$$

由式(31)—式(33)得

$$\| v_2^n\|_{L^2(\alpha,\beta)} = o(\lambda_n^{-1})。 \tag{34}$$

下面,用 $\lambda_n^{-\frac{1}{2}}(\beta-x)\overline{T}^n$ 去乘以式(25)中(e)并在 $L^2(\alpha,\beta)$ 上积分得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left\langle \mathrm{i}\lambda_n v_2^n, (\beta-x)\lambda_n^{\frac{1}{2}}\overline{T}^n\right\rangle_{L^2(\alpha,\beta)} -\\ &\frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{2}(\beta-\alpha)|T^n(\alpha^+)|^2 - \frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{2}\| T^n\|_{L^2(\alpha,\beta)}^2 =\\ &\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\left\langle g_2^n, (\beta-x)\overline{T}^n\right\rangle_{L^2(\alpha,\beta)} = o(1),\end{aligned} \tag{35}$$

因为式(35)左边的第一项、第三项均为无穷小量,所以有

$$|T^n(\alpha^+)| = o\left(\lambda_n^{-\frac{1}{4}}\right)。$$

用 $\lambda_n^{-\frac{1}{2}}(\alpha-x)\overline{T}^n$ 去乘以式(25)中(e)并在 $L^2(\alpha,\beta)$ 上积分,类似可得

$$|T^n(\beta^-)| = o\left(\lambda_n^{-\frac{1}{4}}\right)。$$

另一方面,由式(25)中(b)和(34)得

$$\| v_1^n\|_{L^2(\alpha,\beta)} = o(\lambda_n^{-2})。 \tag{36}$$

利用插值不等式,式(36)和(26)有

$$|v_1^n(\alpha^+)| = o\left(\lambda_n^{-\frac{3}{2}}\right),\ |v_1^n(\beta^-)| = o\left(\lambda_n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

成立,证毕。

引理2 函数 v_1^n 在传输点处满足:

$$\begin{aligned}&|(v_1^n)'(l_1)| = o(1),\ \text{(a)}\\ &|(v_1^n)'(l_2)| = o(1)。\ \text{(b)}\end{aligned} \tag{37}$$

证明 只需证明式(37)中(a)成立,同理可证式(37)中(b)。首先将式(25)中(b)代入式(25)中(e)可得

$$-\lambda_n^2 v_1^n - (v_1^n)'' = \lambda_n^{-1} g_2^n + \mathrm{i}f_2^n,\ x\in(l_1,\alpha)。 \tag{38}$$

记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $Q^n = -\lambda_n^{-1}g_2^n - \mathrm{i}f_2^n$,则式(38)可以被重写为

$$(D-\mathrm{i}\lambda_n)(D+\mathrm{i}\lambda_n)v_1^n = Q^n,\ x\in(l_1,\alpha)。 \tag{39}$$

对最外层算子解式(39)可得

$$(D+\mathrm{i}\omega_n)v_1^n = S_1 e^{\mathrm{i}\lambda_n(x-\alpha)} + \int_\alpha^x e^{\mathrm{i}\lambda_n(x-s)}Q^n(s)\mathrm{d}s。 \tag{40}$$

令 $x=\alpha$,则有

$$S_1 = (v_1^n)'(\alpha) + \mathrm{i}\lambda_n v_1^n(\alpha)。$$

再解一阶方程(40),可得

$$\begin{aligned}v_1^n = S_2 e^{-\mathrm{i}\lambda_n(x-\alpha)} + \frac{S_1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n(x-\alpha)) +\\ \frac{1}{\lambda_n}\int_\alpha^x \sin(\lambda_n(x-s))Q^n(s)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{41}$$

令 $x=\alpha$ 可得

$$S_2 = v_1^n(\alpha)。$$

下面,对式(41)关于 x 求导并取 $x=l_1$ 得

$$(v_1^n)'(l_1) = -\mathrm{i}\lambda_n S_2 e^{-\mathrm{i}\lambda_n(l_1-\alpha)} + S_1\cos(\lambda_n(l_1-\alpha)) +$$

$$\int_{\alpha}^{l_1}\cos(\lambda_n(l_1-s))Q^n(s)\mathrm{d}s。\tag{42}$$

因为 S_1 和 $\lambda_n S_2$ 当 $n\to\infty$ 时是趋于零的,利用 Young 不等式

$$\left|\int_{\alpha}^{l_1}\cos(\lambda_n(l_1-s))g_2^n(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\sqrt{\alpha-l_1}\left(\int_{\alpha}^{l_1}|g_2^n(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,$$

$$\left|\int_{\alpha}^{l_1}\cos(\lambda_n(l_1-s))f_2^n(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\sqrt{\alpha-l_1}\left(\int_{\alpha}^{l_1}|f_2^n(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,$$

则式(42)的右边趋于零,由此可得式(37)中(a)成立。证毕。

对引理 1 的结果运用 $x=\alpha,\beta$ 处的连续性,有

$$\begin{aligned}&|(v_1^n)'(\alpha^-)|=o(\lambda_n^{-\frac{1}{4}}),\ |(v_1^n)'(\beta^+)|=o(\lambda_n^{-\frac{1}{4}}),\\&|v_1^n(\alpha^-)|=o(\lambda_n^{-\frac{3}{2}}),\ |v_1^n(\beta^+)|=o(\lambda_n^{-\frac{3}{2}})。\end{aligned}\tag{43}$$

下面,在区间 $(0,l_1)\cup(l_1,\alpha)\cup(\beta,l_2)\cup(l_2,l_3)$ 上考虑以下方程

$$-\lambda_n^2u_1^n+(u_1^n)^{(4)}=\lambda_n^{-1}g_1^n+\mathrm{i}f_1^n,\ x\in(0,l_1),\tag{44}$$

$$\begin{aligned}-\lambda_n^2v_1^n-(v_1^n)''&=\lambda_n^{-1}g_2^n+\mathrm{i}f_2^n,\\x&\in(l_1,\alpha)\cup(\beta,l_2),\end{aligned}\tag{45}$$

$$-\lambda_n^2w_1^n+(w_1^n)^{(4)}=\lambda_n^{-1}g_3^n+\mathrm{i}f_3^n,\ x\in(l_2,l_3)。$$

用 $\frac{x}{2}(\overline{v}_1^n)'$ 去乘以式(45)并在 $L^2(l_1,\alpha)$ 上积分,有

$$-\frac{1}{2}\lambda_n^2\int_{l_1}^{\alpha}xv_1^n(\overline{v}_1^n)'\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{l_1}^{\alpha}x(v_1^n)''(\overline{v}_1^n)'\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\lambda_n^{-1}}{2}\int_{l_1}^{\alpha}xg_2^n(\overline{v}_1^n)'\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{l_1}^{\alpha}xf_2^n(\overline{v}_1^n)'\mathrm{d}x,$$

对上式利用分部积分公式,式(43)以及引理2的结论可得

$$\int_{l_1}^{\alpha}|\lambda_nv_1^n|^2\mathrm{d}x+\int_{l_1}^{\alpha}|(v_1^n)'|^2\mathrm{d}x+l_1|\lambda_nv_1^n(l_1)|^2=o(1)。\tag{46}$$

再用 $-x(\overline{u}_1^n)'$ 去乘以式(44)并在 $L^2(0,l_1)$ 上积分,有

$$\lambda_n^2\int_0^{l_1}xu_1^n(\overline{u}_1^n)'\mathrm{d}x-\int_0^{l_1}x(u_1^n)^{(4)}(\overline{u}_1^n)'\mathrm{d}x=$$

$$-\lambda_n^{-1}\int_0^{l_1}xg_1^n(\overline{u}_1^n)'\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_0^{l_1}xf_1^n(\overline{u}_1^n)'\mathrm{d}x,$$

利用分部积分公式,$x=0$ 处的边界条件 $u_1^n(l_1)=(u_1^n)'(l_1)=0$ 以及 $x=l_1$ 处的条件 $(u_1^n)''(l_1)=0,(u_1^n)^{(3)}(l_1)=-(v_1^n)'(l_1)$ 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{l_1}|\lambda_nu_1^n|^2\mathrm{d}x+3\int_0^{l_1}|(u_1^n)''|^2\mathrm{d}x-\\&l_1|\lambda_nu_1^n(l_1)|^2-2l_1(u_1^n)'(l_1)(v_1^n)'(l_1)=o(1)。\end{aligned}\tag{47}$$

将式(46)和(47)两式相加

$$\begin{aligned}&\int_0^{l_1}|\lambda_nu_1^n|^2\mathrm{d}x+3\int_0^{l_1}|(u_1^n)''|^2\mathrm{d}x+\\&\int_{l_1}^{\alpha}|\lambda_nv_1^n|^2\mathrm{d}x+\int_{l_1}^{\alpha}|(v_1^n)'|^2\mathrm{d}x=o(1),\end{aligned}\tag{48}$$

此处用到了 $(u_1^n)'(l_1)=O(1),(v_1^n)'(l_1)=o(1)$。类似地,在区间 $(\beta,l_2)\cup(l_2,l_3)$ 上可得

$$\begin{aligned}&\int_{l_2}^{l_3}|\lambda_nw_1^n|^2\mathrm{d}x+3\int_{l_2}^{l_3}|(w_1^n)''|^2\mathrm{d}x+\\&\int_{\beta}^{l_2}|\lambda_nv_1^n|^2\mathrm{d}x+\int_{\beta}^{l_2}|(v_1^n)'|^2\mathrm{d}x=o(1)。\end{aligned}\tag{49}$$

根据式(26)和(34)有

$$\int_{\alpha}^{\beta}|\lambda_nv_1^n|^2\mathrm{d}x+\int_{\alpha}^{\beta}|(v_1^n)'|^2\mathrm{d}x=o(1)。\tag{50}$$

因此,上面式(48)—式(50)三式相加即得

$$1+2\int_0^{l_1}|(u_1^n)''|^2\mathrm{d}x+2\int_{l_2}^{l_3}|(w_1^n)''|^2\mathrm{d}x=o(1)。\tag{51}$$

由于 $2\int_0^{l_1}|(u_1^n)''|^2\mathrm{d}x+2\int_{l_2}^{l_3}|(w_1^n)''|^2\mathrm{d}x\geqslant 0$,所以式(51)左右两边不可能相等,得到一个矛盾,所以

$$\|e^{t\mathcal{A}}U_0\|_{\mathcal{H}}\leqslant Ct^{-1}\|U_0\|_{D(\mathcal{A})}。$$

下面,利用非指数稳定性部分的论述以及反证法去证明多项式衰减率 t^{-1} 是最优的。假设对于某个 $\varepsilon>0$,衰减率可以被提高为 $t^{-(1+\varepsilon)}$;那么,根据不等式(21)有

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{\frac{2}{1+\varepsilon}}}\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2\geqslant C\lambda_n^{\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}}。$$

由 $U_n=(\mathrm{i}\lambda_n-\mathcal{A})^{-1}F_n$ 即有

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}\|(\mathrm{i}\lambda-\mathcal{A})^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}}\to\infty,n\to\infty,$$

这与 Borichev 和 Tomilov 在文献[7]中的定理 2.4 的多项式衰减率等价性条件相矛盾。因此,衰减率 t^{-1} 在 $D(\mathcal{A})$ 上不能被提高。定理 1 的结论②证毕。

5 结论

本文考虑仅在弦内部带有 K-V 阻尼的梁-弦-梁传输系统,利用半群理论、频域分析工具

证明了系统的解达不到指数衰减;在此基础上,利用频域法和乘子法对系统的解的长时间行为进行了更加精细的分析,建立了显式的多项式衰减率,并验证了衰减率的最优性。这一结果表明仅在弦内部分布的K-V阻尼不足以使得整个系统指数稳定,仅能达到多项式稳定。

参考文献:

[1] Liu K S, Chen S P, Liu Z Y. Spectrum and Stability for Elastic Systems with Global or Local Kelvin-Voigt Damping[J]. *SIAM J Appl Math*, 1998, **59**(2): 651−668. DOI:10.1137/s0036139996292015.

[2] Liu K S, Liu Z Y. Exponential Decay of Energy of the Euler-Bernoulli Beam with Locally Distributed Kelvin: Voigt Damping[J]. *SIAM J Control Optim*, 1998, **36**(3): 1086−1098. DOI:10.1137/s0363012996310703.

[3] Renardy M. On Localized Kelvin-Voigt Damping[J]. *Z Angew Math Mech*, 2004, **84**(4): 280−283. DOI:10.1002/zamm.200310100.

[4] Liu Z Y, Zhang Q. Stability of a String with Local Kelvin-Voigt Damping and Nonsmooth Coefficient at Interface[J]. *SIAM J Control Optim*, 2016, **54**(4): 1859−1871. DOI:10.1137/15m1049385.

[5] Liu K S, Rao B P. Exponential Stability for the Wave Equations with Local Kelvin-Voigt Damping[J]. *Z Angew Math Phys ZAMP*, 2006, **57**(3): 419−432. DOI: 10.1007/s00033-005-0029-2.

[6] Liu Z Y, Rao B P. Frequency Domain Characterization of Polynomial Decay Rate for the Solution of Linear Evolution Equation[J]. *Z Angew Math Phys*, 2005, **56**(4): 630−644. DOI:10.1007/s00033-004-3073-4.

[7] Borichev A, Tomilov Y. Optimal Polynomial Decay of Functions and Operator Semigroups[J]. *Math Ann*, 2010, **347**(2): 455−478. DOI:10.1007/s00208-009-0439-0.

[8] Ghader M, Nasser R, Wehbe A. Optimal Polynomial Stability of a String with Locally Distributed Kelvin-Voigt Damping and Nonsmooth Coefficient at the Interface[J]. *Math Meth Appl Sci*, 2021, **44**(2): 2096−2110. DOI: 10.1002/mma.6918.

[9] Rivera J E M, Villagran O V, Sepulveda M. Stability to Localized Viscoelastic Transmission Problem[J]. *Commun Partial Differ Equ*, 2018, **43**(5): 821−838. DOI:10.1080/03605302.2018.1475490.

[10] Alves M, Rivera J E M, Sepúlveda M, *et al*. The Lack of Exponential Stability in Certain Transmission Problems with Localized Kelvin-Voigt Dissipation[J]. *SIAM J Appl Math*, 2014, **74**(2): 345−365. DOI:10.1137/130923233.

[11] Contreras G A, Rivera J E M. Stability of a Timoshenko System with Localized Kelvin-Voigt Dissipation[J]. *Appl Math Optim*, 2021, **84**(3): 3547−3563. DOI: 10.1007/s00245-021-09758-8.

[12] Maryati T, Rivera J E M, Rambaud A, *et al*. Stability of an N-Component Timoshenko Beam with Localized Kelvin-Voigt and Frictional Dissipation[J]. *Electron J Differ Eq*, 2018, **136**: 1−18.

[13] Hassine F. Stability of a Star-sharped Network with Local Kelvin-Voigt Damping and Non-smooth Coefficient at Interface[J]. *J Differ Equ*, 2021, **297**: 1−24. DOI: 10.1016/j.jde.2021.06.017.

[14] Hassine F. Stability for Euler-Bernoulli Beam Equation with a Local Degenerated Kelvin-Voigt Damping[J]. *Acta Appl Math*, 2023, **184**(1): 3. DOI:10.1007/s10440-023-00559-5.

[15] Hassine F. Energy Decay Estimates of Elastic Transmission Wave/Beam Systems with a Local Kelvin-Voigt Damping[J]. *Int J Control*, 2016, **89**(10): 1933−1950. DOI:10.1080/00207179.2015.1135509.

[16] Bouallagui Z, Jellouli M. Stability of a Coupled String-Rayleigh Beam System with Indefinite Sign Damping [J]. *Int J Control*, 2026: 1−19. DOI: 10.1080/00207179.2026.2644574.

[17] Hong G, Kim H, Hong H. Stabilization of a Transmission Problem for Two Rayleigh Beams And a String with Damping[J]. *J Evol Equ*, 2024, **24**(4): 80. DOI: 10.1007/s00028-024-01012-2.

[18] Martínez B B, Ospino J G, Monzón J H. Analysis of the Exponential Stability of a Beam-string-beam Transmission Problem with Local Damping on the String[J]. *Eur J Control*, 2024, **77**: 100988. DOI: 10.1016/j. ejcon.2024.100988.

[19] Martínez B B, Hmonzón J H, Rolong G V. Exponential Stability of a Damped Beam-string-beam Transmission Problem[J]. *Electron J Differ Eq*, 2022, **30**: 1−19. DOI: 10.58997/ejde.2022.30.