自锚式悬索桥空间主缆参数解析算法分析

高小明[1],魏伊航[1],毛 玲[1],吕振纲[1],王高淦[1],李 涛[2*]
(1.南昌市政公用工程项目管理有限公司,南昌 330025; 2.华东交通大学 土木建筑学院,南昌 330013)

摘 要: 悬索桥主缆参数是下达施工控制指令、决定成桥受力状态的重要依据。为计算自锚式悬索桥空间主缆参数,文中推导建立了适用于悬索桥三维主缆的悬链线表达式;在此基础上通过力学分析,构建了描述空间主缆平衡状态的非线性方程、边界条件方程和几何相容方程。提出了采用刚性支承连续梁法确定吊索竖向拉力分量,并据此计算吊索横桥向拉力分量,精准考虑了吊索倾斜对主缆竖向及横桥向受力的影响。在此基础上,进一步提出了主缆方程简化算法,将悬索桥缆索系统方程未知参数缩减至3个;基于牛顿迭代算法编制了求解该方程的计算程序,计算主缆各索段无应力长度与索力等参数,所得结果与文献方法及商业软件结果吻合良好。该方法在保证计算精度的前提下,计算高效可靠、思路简洁清晰,便于工程设计人员快速准确获取空间主缆参数。

关键词: 自锚式悬索桥; 无应力长度; 理论分析; 悬链线; 空间主缆; 简化算法; 牛顿迭代算法
中图分类号: U448.25 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671－9379(2026)07－0101－11
DOI: 10.13969/j.jzgjgjz.20241211002

Analytical Algorithm for Spatial Main Cable Parameters of Self-Anchored Suspension Bridges

GAO Xiaoming[1], *WEI Yihang*[1], *MAO Ling*[1], *LYU Zhengang*[1], *WANG Gaogan*[1], *LI Tao*[2*]
(1. Nanchang Municipal Engineering Project Management Co., Ltd., Nanchang 330025, China;
2. School of Civil Engineering & Architecture, East China Jiao Tong University, Nanchang 330013, China)
*Corresponding author: litao@ecjtu.edu.cn

Abstract: The parameters of the main cable in a suspension bridge are crucial for issuing construction control directives and determining the bridge finished state. To calculate the construction parameters of self-anchored spatial suspension bridges, a three-dimensional catenary expression suitable for suspension bridges has been derived. Based on this, a mechanical analysis has established nonlinear equations, boundary condition equations, and geometric compatibility equations that describe the equilibrium state of the spatial main cable. A method for determining the vertical tension component of the hangers using rigidly supported continuous beams is proposed, allowing for the calculation of the horizontal tension component of the hangers. This accurately considers the impact of hanger inclination on the vertical and horizontal forces acting on the main cable. Furthermore, a simplification algorithm for the main cable equations is proposed, reducing the number of unknown parameters in the suspension bridge cable system to three. Based on the Newton iteration algorithm, a computational program has been developed to solve these equations, yielding the

收稿日期:2024-12-11
基金项目:国家自然科学基金(52308502、52468023),江西省自然科学基金(20224BAB214065、20224BAB204064)
作者简介:
高小明(1977—),男,学士,高级工程师,主要从事结构分析方面的研究。E-mail: 1298789311@qq.com。
通信作者:
李 涛(1988—),男,博士,讲师,主要从事结构振动与控制方面的研究。E-mail: litao@ecjtu.edu.cn。

unstressed lengths and tensions of the cable segments. The results are consistent with those from literature methods and commercial software, ensuring high computational accuracy while being more efficient and reliable, with a clearer and more concise approach, enabling engineers to quickly and accurately obtain the construction parameters of the spatial main cable.

Keywords: self-anchored suspension bridge; unstressed length; theoretical analysis; catenary; spatial main cable; simplification algorithm ; Newton iteration algorithm

与普通悬索桥相比,采用空间主缆的自锚式悬索桥通常具有更大的横向刚度与扭转抗力,抗风稳定性优良。相较于传统地锚式悬索桥,自锚式悬索桥的主缆锚固于主梁,无需设置锚碇,可显著降低工程造价。凭借上述优点,自锚式悬索桥在现代桥梁建设中应用广泛[1-2],尤其对于城市桥梁,空间主缆的自锚式悬索桥兼具独特美学效果,常成为城市的地标性建筑,如韩国首尔永宗大桥[3]、美国旧金山-奥克兰湾大桥[4]、中国广州猎德大桥[5]等。

悬索桥设计时,需根据跨径、主缆垂跨比、吊索位置等预设基本参数,确定成桥状态主缆线型,并计算该状态下缆索的无应力长度(下料长度)与拉力。地锚式悬索桥主缆两端锚固于锚碇,与主梁无直接相互作用[6-7],分析过程相对简便。相比之下,自锚式悬索桥主缆与主梁直接锚固,二者受力存在显著耦合效应[8];加之缆索结构的力学行为具有强烈几何非线性特征[9],增大了自锚式悬索桥的主缆线型与无应力长度的计算困难。空间主缆悬索桥体系更为复杂,缆索系统存在多向耦合受力,进一步提升了问题求解难度。为准确计算空间主缆参数,KAROUMI等[10]、WANG等[11]在主缆内部引入初始索力,基于迭代优化思想不断调整初始索力,直至桥梁自重引起的变形小于容许阈值。文献[6,12-13]将全桥吊索及相邻吊索间主缆索段的无应力长度作为未知参数,通过保证缆索线型满足预设目标构型反求各索段无应力长度。

上述方法均采用了非线性有限元法,涉及复杂数值迭代,易因索缆初始参数选取不当导致迭代失败。更重要的是,此类方法以确定各索段无应力长度、索力等参数为计算目标,通常涉及数百个未知变量,计算大跨径悬索桥时效率较低[14]。为此,罗喜恒等[15]研究了主缆成桥状态解析解法,并提出了采用影响矩阵表示目标变量与迭代变量的相互关系。虽然影响矩阵通用性较强,但无法解析计算,相较于利用表征目标变量与迭代变量关系的解析公式,其计算效率明显偏低;且该研究分别建立了主缆与吊索的计算模式,增加了推导过程的复杂度。李传习等[16]以主梁受力合理为目标,提出了成桥状态吊索竖向力的计算方法,并结合空间主缆自锚式悬索桥的受力特点,给出了成桥状态的分析流程,但该方法忽略了倾斜吊索横桥向索力分量对主缆的影响,导致空间主缆横桥向型形精度不足,进而影响主缆拉力与无应力长度的计算。基于现有研究不足,本文提出了一种新型自锚式悬索桥空间主缆参数解析算法,在精准考虑主缆空间效应与吊索倾斜影响的同时,可高效准确计算主缆拉力、无应力长度等施工参数。

1 空间悬链线理论

图1为自重作用下平面拉索受力图示,其中T为拉索张力,γ为拉索容重,ds为该微段长度,α为拉索切线与水平线夹角;$\partial T/\partial x\times \mathrm{d}x$与$\partial \alpha/\partial x\times \mathrm{d}x$分别为拉力与角度增量。

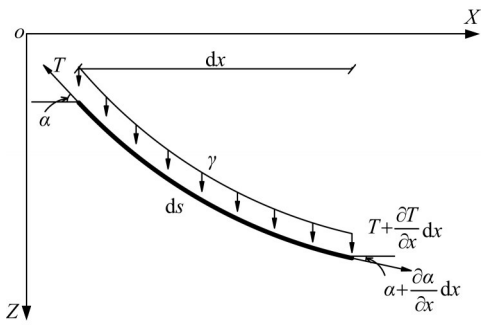

图1 平面悬链线受力分析示意

Fig. 1 Diagram of force analysis of a planar catenary

根据图1进行力学分析,可得索段静力平衡方程为[17]:

$$\gamma\times\sqrt{1+z'^2}+Hz''=0 \tag{1}$$

式中:$H=T\cos(\alpha)$为拉索水平拉力。求解该方程可得拉索悬链线线型方程为:

$$z=-\frac{H}{\gamma}\cosh\left(m_1-\frac{\gamma x}{H}\right)+m_2 \tag{2}$$

式中:m_1、m_2为由拉索边界条件确定的参数。平面主缆悬索桥的全桥主缆位于同一平面内(图2),且该平面与桥梁轴线平行,相邻吊索间主缆曲线可由式(2)精确描述。空间主缆悬索桥的主缆不在同一平面(图3),且在空间坐标系x、y、z三个坐标轴均存在投影长度。

图3所示的三维空间缆索线型,可视为图2平面缆索绕z轴旋转得到[18-19]。旋转前后拉索的线型保持不变,仅所在坐标系发生旋转;依据空间曲线绕轴旋转原理,将式(2)修正为三维悬链线表达式:

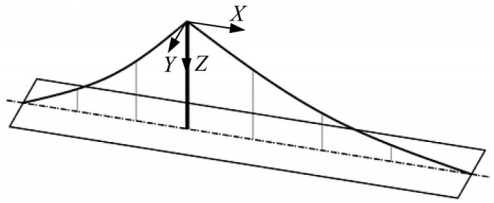

图2　平面主缆自锚式悬索桥

Fig. 2　A self-anchored suspension bridge with planar main cable

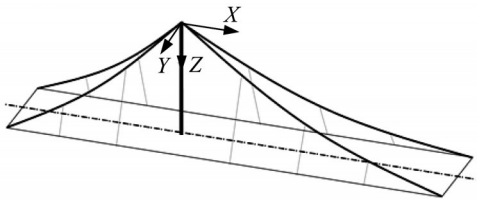

图3　空间主缆自锚式悬索桥

Fig. 3　A self-anchored suspension bridge with spatial main cable

$$z=-\frac{H}{\gamma}\cosh\left(m_1-\frac{\gamma\sqrt{x^2+y^2}}{H}\right)+m_2 \tag{3}$$

式中：水平力H沿空间悬链线所处斜平面(图4a))的水平方向作用。空间悬链线的空间构型及平面投影如图4所示。因自重γ沿z轴方向，其在x、z平面的投影为平面悬链线(图4b))；y轴方向无外荷载作用，其在x、y平面的投影为直线(图4c))。

由力学分析可知，式(3)所示悬链线在水平力H作用下的曲线长度L_s为：

$$L_s=\int_0^{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}\sqrt{1+z'^2}\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

式中：x_i与y_i分别为空间悬链线的右端点坐标(左端点位于坐标原点)。应当指出，上式(包括下文)对z的求导符号“′”，表示将$\sqrt{x^2+y^2}$视为单一变量进行整体求导，即式(3)求导结果为$z'=\sinh(m_1-\gamma\sqrt{x^2+y^2}/H)$。由胡克定律可知曲线的伸长量$\Delta$为：

$$\Delta=\int_0^{L_s}\frac{T}{EA}\mathrm{d}s=\frac{H}{4\gamma EA}\left[2\gamma x-2Hm_1-H\sinh\left(2m_1-\frac{2\gamma x}{H}\right)\right]\Bigg|_0^{L_s} \tag{5}$$

式中：T为拉索拉力；EA为拉索截面轴向刚度。对于给定空间索，当参数H、x_i、y_i、m_1、m_2已知时，空间索的无应力长度等于式(4)计算结果减去式(5)计算结果。

2　空间主缆力学分析

根据多段悬链线理论[20]，悬索桥主缆可视为由相邻吊索分割的多段悬链线组成。空间主缆各段悬链线所在平面互不相同；因自重沿z轴方向，故空间主缆在x、z平面的投影为多段曲线(图5a))；各分段悬链线在y轴方向无分布荷载，故在x、y平面的投影为多段直线(图5b))。

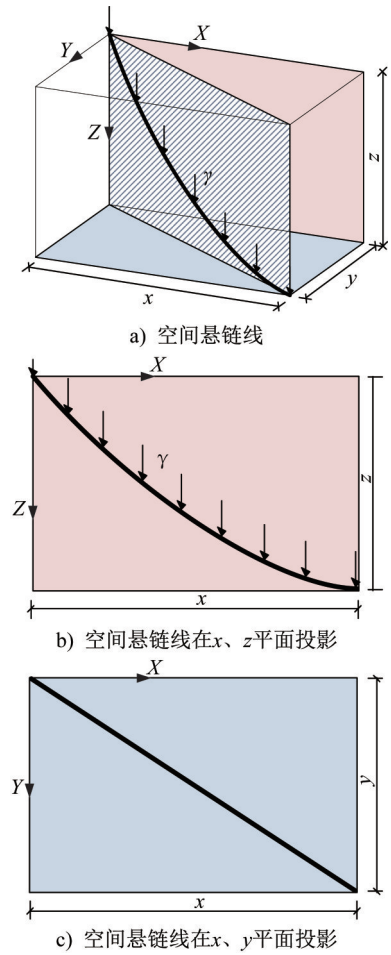

图4　三维空间悬链线线型

Fig. 4　Shape of a three-dimensional spatial catenary

图5中，x_i、y_i、z_i分别为第i段悬链线在x、y、z轴方向的投影长度。F_i、P_i分别为吊索力作用于主缆的y、z轴分量。在各段悬链线左端点建立局部坐标系，由式(3)可得第i段悬链线的线型函数：

$$z=-\frac{H_i}{\gamma}\cosh\left(m_{2i-1}-\frac{\gamma\sqrt{x^2+y^2}}{H_i}\right)+m_{2i} \tag{6}$$

式中：H_i为第i索段在其平面内(图4a)所示阴影平面)的水平力分量；m_{2i-1}、m_{2i}为该索段边界条件确定的参数。

因吊索仅沿横桥向倾斜，主缆x轴方向无外荷载作用，故各段悬链线在x轴方向的拉力分量H_x恒定。根据图4几何关系可得第i段悬链线水平索力在x、y轴方向的拉力分量H_x和H_{yi}分别为：

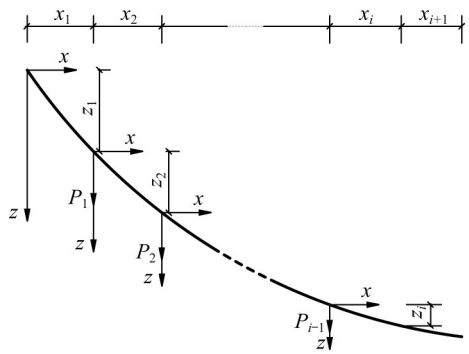

图5 三维主缆分段悬链线投影图

Fig. 5 Three-dimensional projection of segmented catenary main cable

$$H_x = H_i \cdot \frac{x_i}{\sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}} \text{（定值）}$$

$$H_{yi} = H_i \cdot \frac{y_i}{\sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}} \tag{7}$$

同理，第i段悬链线两端竖向(z轴)拉力分量为：

$$V_{0i} = H_i z'\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = H_i \sinh(m_{2i-1})$$

$$V_{1i} = H_i z'\Big|_{\substack{x=x_i\\y=y_i}} = H_i \sinh\left(m_{2i-1} - \frac{\gamma\sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}}{H_i}\right) \tag{8}$$

式中：V_{0i}、V_{1i}分别为第i段悬链线左、右端竖向拉力分量。

2.1 空间主缆力学平衡方程

根据索力沿y、z轴的分量计算式(7)～(8)，结合图5所示的受力模式，由多段索节点受力平衡可得：

$$H_x \frac{y_i}{x_i} - H_x \frac{y_{i+1}}{x_{i+1}} = F_i \tag{9}$$

$$H_x \frac{\sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}}{x_i} \sinh\left(m_{2i-1} - \frac{\gamma x_i}{H_x}\right) - H_x \frac{\sqrt{{x_{i+1}}^2 + {y_{i+1}}^2}}{x_{i+1}} \sinh(m_{2i+1}) = P_i \tag{10}$$

2.2 空间主缆边界条件

对于第i段悬链线其左端点位于局部坐标系原点(0，0，0)，右端点坐标为(x_i，y_i，z_i)，将该边界条件代入式(6)并结合式(7)可得：

$$-\frac{H_x\sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}}{\gamma x_i}\cosh(m_{2i-1}) + m_{2i} = 0 \tag{11}$$

$$-\frac{H_x\sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}}{\gamma x_i}\cosh\left(m_{2i-1} - \frac{\gamma x_i}{H_x}\right) + m_{2i} = z_i \tag{12}$$

2.3 空间主缆相容条件

对于主塔等高的悬索桥，满足几何条件$\sum_{i=1}^{N} z_i = 0$；主缆垂度作为设计的基本参数通常预先设定，并要求主缆在成桥状态需达到预设垂度f，因此有几何条件$\sum_{i=1}^{N/2} z_i - f = 0$，；此外，由主缆横弯对称性可知$\sum_{i=1}^{N} y_i = 0$。综上，空间主缆的几何条件方程为：

$$\sum_{i=1}^{N} z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{N/2} z_i - f = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} y_i = 0 \tag{13}$$

上述平衡条件、边界条件与几何条件方程组中，未知参数为y_i、z_i、m_{2i-1}、m_{2i}和H_x。假设主缆划分为N段悬链线，则未知数总数为$4N+1$，方程(9)～(13)的方程个数分别为$2N$、$2N$-2和3，共计$4N+1$，未知数与方程数相等，故非线性方程组(9)～(13)可解。

2.4 吊索力计算

前述分析假定吊索力已知，即方程(9)中F_i、P_i为定值，但设计阶段吊索力通常难以准确获取。针对空间主缆悬索桥吊索在横桥向倾斜的特点，本节通过建立多点支承单主梁模型确定吊索竖向力，并由此计算吊索横向分力。

2.4.1 吊索力竖向分量P_i

建立仅包含悬索桥主梁的有限元模型，施加与原桥一致的支座边界条件，并在各吊索下吊点处设置竖向支承，边界条件如图6所示。由于主梁右端承受主缆顺桥向水平分力，为消除轴向压缩变形，应对其施加温度荷载使右端水平位移为零。对主梁施加自重、二期恒载等由主梁直接承担的全部恒载后，进行非线性有限元分析，获取各吊点支座竖向反力即为吊索竖向分量P_i。该单梁模型结构简单、单元类型单一，相较于建立包含主缆、主塔和主梁的全桥模型，工作量大幅减小，且收敛性良好。

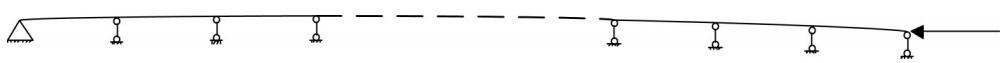

图6 等效刚性支承连续梁

Fig. 6 Equivalent rigidly supported continuous beam

2.4.2　吊索力横向分量 F_i

忽略吊索垂度，第 i 根吊索横桥向分力与竖向分力之比等于吊索横桥向投影长度与竖向投影长度之比，即：

$$\frac{F_i}{P_i}=\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}z_i} \tag{14}$$

式中：$\mathrm{d}y_i$、$\mathrm{d}z_i$ 分别为第 i 根吊索在横桥向与竖向的投影长度。如图7所示，$\mathrm{d}y_0$、$\mathrm{d}z_0$ 为主缆IP点（主缆中心线的理论交点）距主梁边缘的竖向与横向距离（已知结构参数）；y_i、z_i 为第 i 段空间主缆在 y、z 轴的投影长度，为方程组(9)～(14)的待求未知量。由图中几何关系可得：

$$\mathrm{d}y_i=\mathrm{d}y_0-\sum_{i=1}^{i}y_i \quad \mathrm{d}z_i=\mathrm{d}z_0-\sum_{i=1}^{i}z_i \tag{15}$$

将式(15)代入式(14)即得：

$$F_i=P_i\left(\mathrm{d}y_0-\sum_{i=1}^{i}y_i\right)\Big/\left(\mathrm{d}z_0-\sum_{i=1}^{i}z_i\right) \tag{16}$$

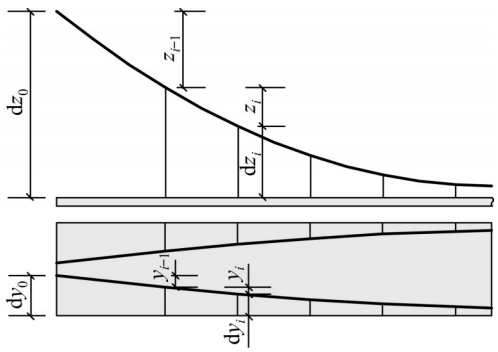

图7　吊索投影长度几何关系图

Fig. 7　Geometric diagram of cable projection length

3　空间主缆非线性方程简化算法

空间主缆力学方程组(9)～(12)为高度耦合的非线性方程组，理论上可以求解，但实际计算中未知量个数较多、迭代收敛较慢，甚至难以收敛。为此，本节提出该方程组的快速求解方法，将原方程组简化为仅含3个未知量的非线性方程组，采用牛顿迭代法高效求解主缆设计参数。

观察方程(9)～(12)可知，未知参数为 y_i、z_i、m_{2i-1}、m_{2i} 和 H_x。选取 H_x、y_1、z_1（i=1，对应第一根索段参数）为基本参数，其余参数（i>1）可由基本参数递归表达。由方程(9)可得参数 y_2：

$$y_2=x_2\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{F_1}{H_x}\right) \tag{17}$$

式中：F_1 可由方程(16)确定，即 $F_1=P_1(\mathrm{d}y_0-y_1)/(\mathrm{d}z_0-z_1)$。

根据边界条件方程(11)～(12)，变量 m_1 与 m_2 可通过数学变换表示为：

$$m_1=\sinh^{-1}\left[\frac{z_1x_1\gamma}{2H_x\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}\cdot\sinh^{-1}\left(\frac{\gamma x_1}{2H_x}\right)\right]+\frac{\gamma x_1}{2H_x} \tag{18}$$

$$m_2=\frac{H_x\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\cosh(m_1)}{\gamma x_1} \tag{19}$$

通过方程(10)，可以得到包含参数 m_3 的方程：

$$H_x\frac{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}{x_1}\sinh\left(m_1-\frac{\gamma x_1}{H_x}\right)-H_x\frac{\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}{x_2}\sinh(m_3)=P_1 \tag{20}$$

进而将参数 m_3 表达为：

$$m_3=\sinh^{-1}\left[-\frac{P_1x_2}{H_x\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}+\frac{x_2\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}{x_1\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}\sinh\left(m_1-\frac{\gamma x_1}{H_x}\right)\right] \tag{21}$$

由方程(12)可知 m_4 为：

$$m_4=\frac{H_x\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}\cosh(m_3)}{\gamma x_2} \tag{22}$$

将 m_3、m_4 代入方程(12)可得参数 z_2 为：

$$z_2=m_4-\frac{H_x\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}{\gamma x_2}\cosh\left(m_3-\frac{\gamma x_2}{H_x}\right) \tag{23}$$

通过上述过程，由基本参数 H_x、y_1、z_1 推导建立了参数 y_2 的表达式(17)与 z_2 的表达式(23)；同理可求得其余参数 y_i、z_i（i>2），将非线性方程组简化为仅含3个未知基本参数的方程，大幅提升可解性。递归过程的伪代码如图8所示。综上，根据基本参数 H_x、y_1、z_1 即可递推计算方程组(9)～(12)中的全部未知参数；而基本参数真实值由方程(13)确定，采用牛顿迭代法求解以 H_x、y_1、z_1 为未知量、满足方程(13)的三元非线性方程组，即可确定基本参数。

4　数值算例

4.1　永宗大桥

以韩国永宗大桥为算例验证算法的适用性与有效性。该桥为双塔三跨自锚式悬索桥，跨径布置为125 m＋300 m＋125 m，主缆垂度为60 m，主缆呈空间分布。大桥具体布置及主缆索段编号如图9所示，编号规则为：主缆索段编号从左向右依次为 c_1、c_2、c_3…，吊索上顶点编号从左向右依次为①、②、③…。大桥主要构件及材料特性见表1。

1 建立图7所示仅包含悬索桥主梁的刚性支承连续梁有限元模型，分析获取吊索处支座反力P_i；
2 假定基本参数H_x、y_1和z_1初值；
3 由式(18)、式(19)计算参数m_1和m_2的值：
4 递推计算y_i和z_i(i>2)：i=1:N−1
(N为主缆被吊索划分的悬链线段数)

$$F_i=P_i\left(\mathrm{d}y_0-\sum_{i=1}^{i}y_i\right)\Big/\left(\mathrm{d}z_0-\sum_{i=1}^{i}z_i\right)$$

(由式(16)确定)

$$y_{i+1}=x_{i+1}\left(\frac{y_i}{x_i}-\frac{F_i}{H_x}\right)$$

(由式(9)确定)

$$m_{2i+1}=\sinh^{-1}\left[-\frac{P_i x_{i+1}}{H_x\sqrt{x_{i+1}^2+y_{i+1}^2}}+\frac{x_{i+1}\sqrt{x_i^2+y_i^2}}{x_i\sqrt{x_{i+1}^2+y_{i+1}^2}}\sinh\left(m_{2i-1}-\frac{\gamma x_i}{H_x}\right)\right]$$

(由式(21)确定)

$$m_{2i+2}=\frac{H_x\sqrt{x_{i+1}^2+y_{i+1}^2}\cosh(m_{2i+1})}{\gamma x_{i+1}}$$

(由式(22)确定)

$$z_{i+1}=m_{2i+2}-\frac{H_x\sqrt{x_{i+1}^2+y_{i+1}^2}}{\gamma x_{i+1}}\cosh\left(m_{2i+1}-\frac{\gamma x_{i+1}}{H_x}\right)$$

(由式(23)确定)

结束循环

图8 空间主缆非线性力学方程递推简化算法伪代码

Fig. 8 Pseudocode for the recursive simplification algorithm of nonlinear equations of spatial main cables

对含3个基本参数的非线性方程组采用牛顿迭代法进行迭代求解，通设置不同基本参数初始值检验递推简化算法的有效性与鲁棒性。在该算法中基本参数为H_x、y_1、z_1，其各自物理意义分别为：H_x为主缆顺桥向的水平张力；y_1、z_1分别为空间主缆第一段悬链线横桥向与竖桥向的投影距离，上述参数可根据经验公式粗略估算(如忽略主缆空间布置、将吊索力等效为均布荷载并假定主缆为单根悬链线)。

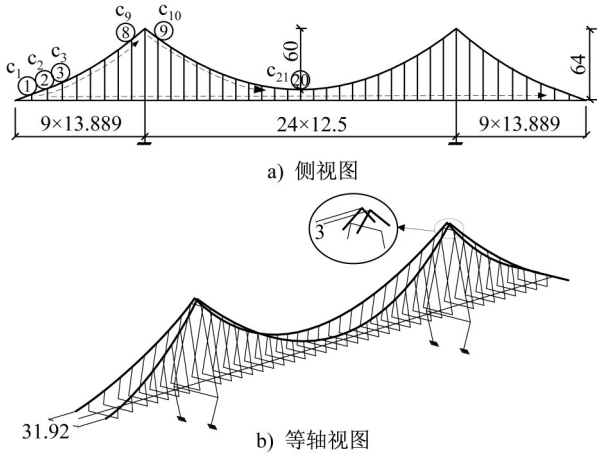

图9 永宗大桥布置图(单位：m)

Fig. 9 Arrangement of the Yongzong Bridge (unit: m)

本算例采用表2中的初始设定值分别进行迭代计算，迭代过程见图10。从迭代结果可以看出，各工况在不同初值下均收敛于唯一解；且在AMD Ryzen 9 5900X计算平台上，迭代计算时间均小于0.1 s(收敛阈值为10^{-11})，体现了本文算法具有较好的鲁棒性与计算效率。

表1 永宗大桥主要构件及材料特性

Table 1 Main members and material properties of Yongzong Bridge

构件	弹性模量/GPa	截面面积/m²	抗弯刚度/(kN·m⁻⁴)	荷载集度/(kN·m⁻¹)
主缆	196.20	0.258	—	29.74
吊索	137.40	0.034	—	3.92
主梁	206.01	1.363	217.386 0	445.18
主塔(桥面以上)	206.01	1.782	7.947 4	274.46
主塔(桥面以下)	206.01	1.312	3.436 2	202.08

表2 基本参数初始值设定

Table 2 Initial value setting of basic parameters

工况	H_x/kN	y_1/m	z_1/m	收敛误差/$\times10^{-12}$
工况1	10 000	10	30	3.00
工况2	90 000	10	30	7.30
工况3	90 000	0.1	30	8.30
工况4	90 000	0.1	2	4.00
工况5	10 000	0.1	2	3.00
迭代结果	53 087.200 000	2.108 982	9.628 634	2.050 000

表3对比了本文计算结果与文献[3]主缆节点坐标。可以看出，二者最大差异仅为46 mm(桥跨175 m位置处)，验证了本文方法的正确性。

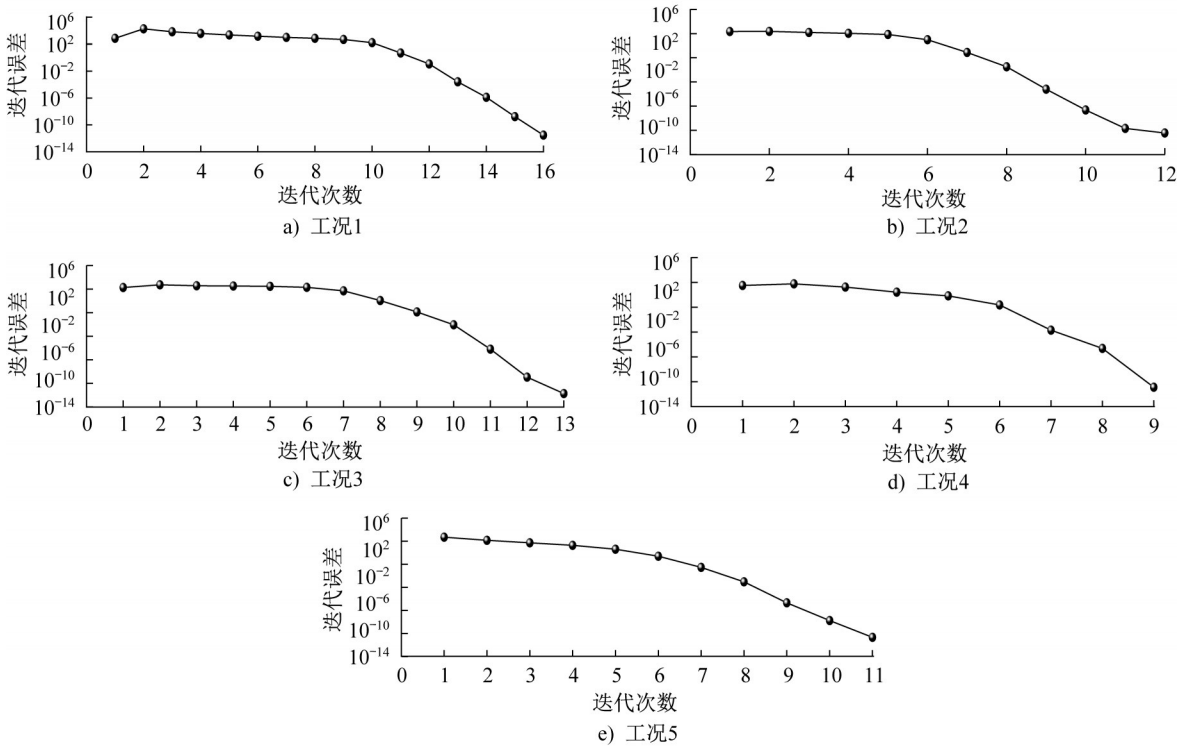

图10　不同初始值迭代误差变化图

Fig. 10　Variation of iteration errors with different initial values

表3　本文文献[3]与主缆节点坐标对比

Table 3　Comparison of main cable node coordinates between proposed method and reference [3]

桥跨位置/m	主缆横坐标(文献[3])/m	主缆横坐标(本文解)/m	主缆纵坐标文献[3])/m	主缆纵坐标(本文解)/m
125.0	1.500	1.500	−114.573	−114.573
137.5	3.632	3.609	−104.938	−104.944
150.0	5.586	5.548	−96.160	−96.166
162.5	7.360	7.315	−88.230	−88.237
175.0	8.955	8.909	−81.147	−81.153
187.5	10.369	10.327	−74.905	−74.911
200.0	11.601	11.568	−69.502	−69.507
212.5	12.650	12.629	−64.935	−64.939
225.0	13.514	13.506	−61.201	−61.204
237.5	14.191	14.197	−58.300	−58.302
250.0	14.678	14.697	−56.228	−56.230
262.5	14.973	15.000	−54.985	−54.987
275.0	15.071	15.102	−54.573	−54.573

4.2　洪州大桥

南昌洪州大桥为自锚式悬索桥，跨径布置为50 m＋120 m＋252 m＋120 m＋50 m(图11)；主梁采用钢-混凝土组合结构，其中两锚跨主梁采用50 m跨径预应力混凝土结构，其余主梁采用钢-混凝土叠合梁。该桥主缆呈三维空间布置，竖向垂度与横弯关键参数如图12所示，其中主缆及节点编号用以标识主缆位置。考虑结构的对称性，图中仅标注半跨编号。

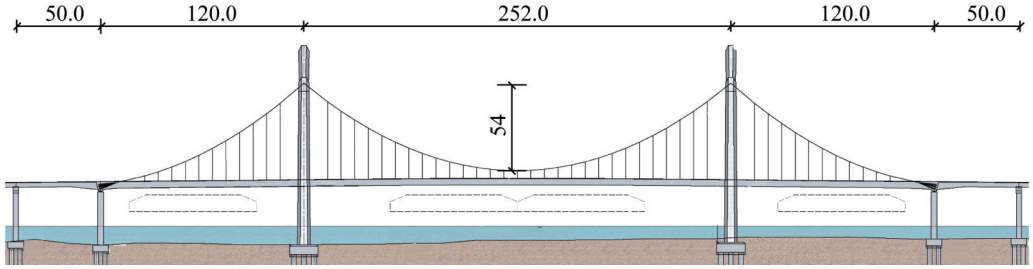

图11 洪州大桥立面布置图(单位:m)

Fig. 11 Elevation arrangement of the Hongzhou Bridge (unit: m)

分别采用本文多段空间悬链线与Midas Civil节线法[21]求解缆索线型,其中主缆索段编号从左端依次编号为1~27,各索段右端点依次编号为1~26,索段与节点编号规则如图12所示。两种计算方法结果对比见表4,各节点坐标y表示以主缆左侧IP点为坐标原点的横桥向位置,z为对应节点的竖向坐标。由表4可知,两种方法计算结果偏差小于2 mm,表明本文方法精度极高。此外,本文算法求得主缆顺桥向的拉力分量为55 543 kN,Midas Civil悬索桥分析得到的水平力分量为55 395 kN,二者偏差仅为0.26%,进一步验证了上述结论。

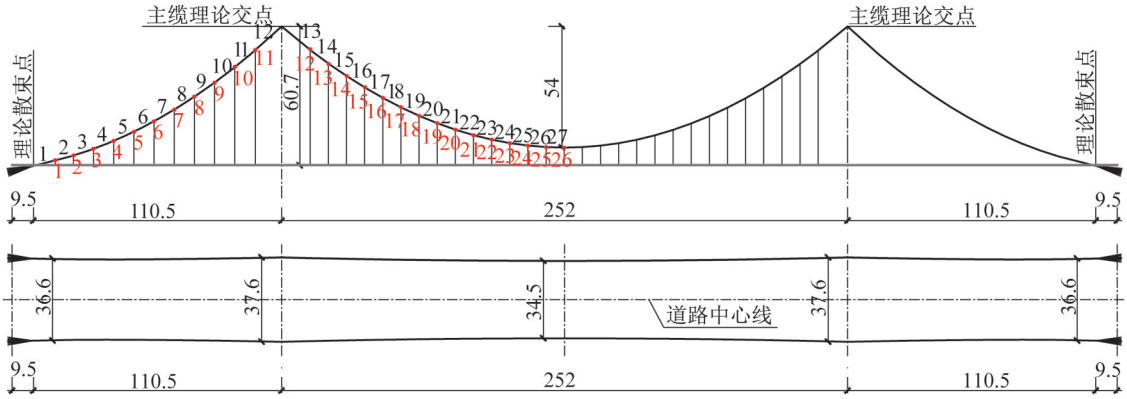

图12 大桥空间主缆线型布置图(单位:m)

Fig. 12 Spatial arrangement of the main cable of the bridge (unit: m)

表4 本文与Midas Civil节线法计算的主缆节点坐标对比

Table 4 Comparison of main cable node coordinates between proposed method and Midas Civil frame method m

节点号	本文方法		Midas Civil		节点号	本文方法		Midas Civil	
	y	z	x	y		y	z	y	z
1	1.650	59.701	1.652	59.701	14	0.666	22.652	0.668	22.650
2	1.573	56.971	1.573	56.969	15	0.813	27.663	0.811	27.664
3	1.485	53.801	1.484	53.802	16	0.949	32.238	0.950	32.238
4	1.384	50.193	1.384	50.191	17	1.071	36.376	1.070	36.375
5	1.272	46.148	1.271	46.146	18	1.181	40.077	1.183	40.077
6	1.148	41.666	1.150	41.664	19	1.277	43.342	1.278	43.341
7	1.011	36.746	1.009	36.747	20	1.361	46.171	1.360	46.169
8	0.863	31.390	0.862	31.391	21	1.433	48.564	1.433	48.564
9	0.704	25.596	0.703	25.597	22	1.491	50.521	1.492	50.521
10	0.532	19.369	0.531	19.367	23	1.536	52.043	1.538	52.045
11	0.349	12.717	0.350	12.718	24	1.569	53.131	1.571	53.133
12	0.333	11.340	0.332	11.339	25	1.588	53.783	1.589	53.785
13	0.505	17.208	0.505	17.210	26	1.595	54.000	1.595	54.000

由式(4)～(5)计算各段主缆的无应力长度,计算结果与Midas Civil结果对比见表5。两种方法计算的无应力长度偏差均小于5 mm,且该偏差呈正负值无规律分布,判定为数值精度导致的偏差。此外,两种方法计算的主缆总长度偏差(即各段主缆无应力长度偏差求和)为7 mm,计算精度满足工程要求。

表5　本文与Midas Civil无应力长度计算结果对比

Table 5　Comparison of unstressed lengths between proposed method and Midas Civil

索段号	本文方法/m	Midas Civil/m	偏差/mm	索段号	本文方法/m	Midas Civil/m	偏差/mm
1	17.299	17.297	2	15	9.650	9.651	−1
2	8.431	8.431	0	16	9.414	9.413	1
3	8.583	8.585	−2	17	9.191	9.187	4
4	8.753	8.752	1	18	8.983	8.984	−1
5	8.941	8.937	4	19	8.792	8.789	3
6	9.145	9.146	−1	20	8.618	8.619	−1
7	9.366	9.368	−2	21	8.464	8.459	5
8	9.601	9.597	4	22	8.329	8.333	−4
9	9.849	9.850	−1	23	8.216	8.215	1
10	10.108	10.110	−2	24	8.124	8.123	1
11	10.373	10.371	2	25	8.054	8.053	1
12	18.855	18.853	2	26	8.007	8.010	−3
13	17.963	17.968	−5	27	7.984	7.988	−4
14	9.893	9.890	3				

将本文计算的主缆节点坐标与各索段无应力长度作为建模参数,直接在Midas Civil中建立模型,无需软件内置悬索桥分析功能即可得到悬索桥成桥状态。建模后采用非线性分析得到全桥变形如图13所示(锚跨为预应力混凝土结构,其变形与全桥缆索系统参数无关,故忽略锚跨变形)。由图可知,采用直接建模法,以表4主缆节点坐标与表5各索段无应力长度为建模参数构建模型后,结构最大变形位于跨中,仅为1.31 cm,表明全桥均处于小变形状态。拉索系统产生的重力刚度与结构自重相互平衡,满足“梁平塔直”的成桥状态要求。因此,本文方法的计算结果可直接用于悬索桥有限元模型的建立,能够高效获取结构合理成桥状态。

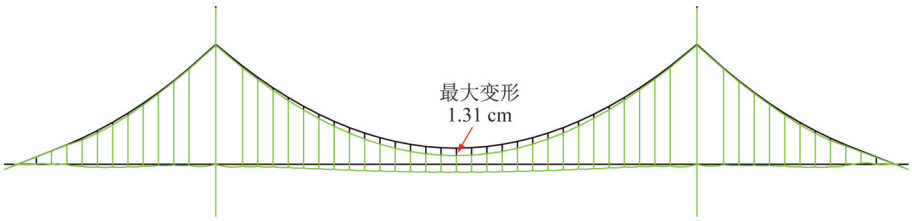

图13　基于索段无应力长度建模的全桥变形图

Fig. 13　Full bridge deformation diagram based on unstressed length of cable segments

5　结论

本文提出自锚式悬索桥空间主缆参数解析算法,可精准计算主缆线型与无应力长度,并直接用于建立全桥有限元模型。主要结论如下:

(1) 空间主缆线型函数为三维悬链线,可依据空间曲线绕轴旋转规则,由传统平面悬链线变换得到。

(2) 采用刚性支承连续梁模型可确定全桥吊索竖向力分量,结合吊索几何投影关系计算横向力分量,将全桥缆索系统计算转化为单根主缆在确定外荷载下的力学分析问题。

(3) 自锚式悬索桥空间主缆施工参数仅由3个基本参数控制,与桥梁跨径、主缆悬链线段数无关;采用牛顿迭代法求解含基本参数的非线性方程组,可精准确定主缆施工参数,算法鲁棒性强、计算效率高。

(4) 由主缆施工参数可直接建立悬索桥有限元模型,无需有限元软件非线性迭代即可确定合理成桥状态,

有效避免边界条件、求解参数设置不当导致的收敛困难，便于开展后续施工模拟与动力响应分析。

后续研究可进一步分析主梁竖曲线对吊索力的影响，精细化考虑主索鞍对主缆边界条件的作用；并将本研究与ANSYS、ABAQUS等商业软件深度集成，通过接口程序实现递归算法与桥梁模型互联，开发悬索桥专用建模分析工具，便于设计人员应用本文理论与算法。

参考文献：

[1] 黄剑锋，徐洲，彭鹏.自锚式悬索桥“先缆后梁”施工临时锚碇方案研究[J].桥梁建设，2021，51(5)：130-137.DOI：10.3969/j.issn.1003-4722.2021.05.019.
HUANG Jianfeng，XU Zhou，PENG Peng. Research on temporary anchorage types for self-anchored suspension bridge with main cables installed ahead of stiffening girder[J]. Bridge Construction，2021，51(5)：130-137.DOI：10.3969/j.issn.1003-4722.2021.05.019.(in Chinese)

[2] 韩艳，陈政清，罗世东，等.自锚式悬索桥空间主缆线形的计算方法[J].湖南大学学报(自然科学版)，2007，34(12)：20-25.
HAN Yan，CHEN Zhengqing，LUO Shidong，et al. Calculation method for the shape-finding of self-anchored suspension bridge with spatial cables[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences)，2007，34(12)：20-25.(in Chinese)

[3] KIM H K，LEE M J，CHANG S P.Non-linear shape-finding analysis of a self-anchored suspension bridge[J].Engineering Structures，2002，24(12)：1547-1559.DOI：10.1016/S0141-0296(02)00097-4.

[4] SUN J，MANZANAREZ R，NADER M.Design of looping cable anchorage system for new San francisco：oakland bay bridge main suspension span [J]. Journal of Bridge Engineering，2002，7(6)：315-324.DOI：10.1061/(ASCE)1084-0702(2002)7:6(315).

[5] 孙叔禹.广州猎德大桥主桥设计[J].山西建筑，2007，33(22)：299-300.DOI：10.13719/j.cnki.cn14-1279/tu.2007.22.189.
SUN Shuyu. The design of main bridge of Liede bridge in Guangzhou[J]. Shanxi Architecture，2007，33(22)：299-300.DOI：10.13719/j.cnki.cn14-1279/tu.2007.22.189.(in Chinese)

[6] KIM K S，LEE H S.Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges [J]. Computers & Structures，2001，79(29/30)：2681-2692.DOI：10.1016/S0045-7949(01)00120-1.

[7] 董鹏宇，缪长青，葛付何.某自锚式悬索桥主缆锚固区力学性能[J].中国科技论文，2023，18(2)：131-136，143.DOI：10.3969/j.issn.2095-2783.2023.02.003.
DONG Pengyu，MIAO Changqing，GE Fuhe. Mechanical behaviors of cable anchorage zone of a self-anchored suspension bridge[J].China Sciencepaper，2023，18(2)：131-136，143.DOI：10.3969/j.issn.2095-2783.2023.02.003.(in Chinese)

[8] LI J H，FENG D M，LI A Q，et al.Determination of reasonable finished state of self-anchored suspension bridges[J].Journal of Central South University，2016，23(1)：209-219.DOI：10.1007/s11771-016-3064-6.

[9] 张文明，常佳琦，田根民，等.不等主跨三塔空间缆索悬索桥主缆线形解析计算方法[J].桥梁建设，2022，52(1)：109-115.
ZHANG Wenming，CHANG Jiaqi，TIAN Genmin，et al.An analytical method for main cable shape of three-tower suspension bridge with asymmetrical two main spans and spatial cables[J].Bridge Construction，2022，52(1)：109-115.(in Chinese)

[10] KAROUMI R.Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges[J].Computers & Structures，1999，71(4)：397-412.DOI：10.1016/S0045-7949(98)00244-2.

[11] WANG P H，TSENG T C，YANG C G.Initial shape of cable-stayed bridges [J]. Computers & Structures，1993，46(6)：1095-1106.DOI：10.1016/0045-7949(93)90095-U.

[12] KIM H K，KIM M Y.Efficient combination of a TCUD method and an initial force method for determining initial shapes of cable-supported bridges [J]. International Journal of Steel Structures，2012，12(2)：157-174.DOI：10.1007/s13296-012-2002-1.

[13] JUNG M R，MIN D J，KIM M Y.Nonlinear analysis methods based on the unstrained element length for determining initial shaping of suspension bridges under dead loads [J]. Computers & Structures，2013，128：272-285.DOI：10.1016/j.compstruc.2013.06.014.

[14] MARTINS A M B，SIMÕES L M C，NEGRÃO J H J O.Optimum design of concrete cable-stayed bridges [J]. Engineering Optimization，2016，48(5)：772-791.DOI：10.1080/0305215X.2015.1057057.

[15] 罗喜恒，肖汝诚，项海帆.空间缆索悬索桥的主缆线形分析[J].同济大学学报(自然科学版)，2004，32(10)：1349-1354.DOI：10.3321/j.issn：0253-374X.2004.10.017.
LUO Xiheng，XIAO Rucheng，XIANG Haifan.Cable shape analysis of suspension bridge with spatial cables[J].Journal of Tongji University (Natural Science)，2004，32(10)：1349-1354.DOI：10.3321/j.issn：0253-374X.2004.10.017.(in Chinese)

[16] 李传习，柯红军，刘海波，等.空间主缆自锚式悬索桥成桥状态的确定方法[J].工程力学，2010，27(5)：137-146.
LI Chuanxi，KE Hongjun，LIU Haibo，et al.Determination of finished bridge state of self-anchored suspension bridge with spatial cables[J].Engineering Mechanics，2010，27(5)：137-146.(in Chinese)

[17] AN X W，GOSLING P D，ZHOU X Y.Analytical structural reliability analysis of a suspended cable[J].Structural Safety，2016，58：20-30.DOI：10.1016/j.strusafe.2015.08.001.

[18] KIM S E，THAI H T.Nonlinear inelastic dynamic analysis of suspension bridges[J].Engineering Structures，2010，32(12)：3845-3856.DOI：10.1016/j.engstruct.2010.08.027.

[19] TUR M，GARCÍA E，BAEZA L，et al.A 3D absolute nodal

coordinate finite element model to compute the initial configuration of a railway catenary[J].Engineering Structures, 2014,71:234-243.DOI:10.1016/j.engstruct.2014.04.015.

[20] 唐茂林,强士中,沈锐利.悬索桥成桥主缆线形计算的分段悬链线法[J].铁道学报,2003,25(1):87-91.DOI:10.3321/j.issn:1001-8360.2003.01.018.
TANG Maolin, QIANG Shizhong, SHEN Ruili. Segmental catenary method of calculating the cable curve of suspension bridge[J].Journal of the China Railway Society,2003,25(1):87-91.DOI:10.3321/j.issn:1001-8360.2003.01.018.(in Chinese)

[21] 葛俊颖.桥梁工程软件Midas Civil使用指南[M].北京:人民交通出版社,2013.
GE Junying.Guide to the use of bridge engineering software Midas Civil[M].Beijing:China Communications Press,2013.(in Chinese)

(上接第55页)

[6] 王志滨,宋培,徐辉,等.CFRP-PE-不锈钢筋混凝土短柱的设计方法研究[J].湖南大学学报(自然科学版),2024,51(5):22-33.DOI:10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2024044.
WANG Zhibin, SONG Pei, XU Hui, et al. Study on design method of CFRP-PE-stainless steel-reinforced concrete short column[J].Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2024,51(5):22-33.DOI:10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2024044.(in Chinese)

[7] 王作虎,刘杜,袁非凡,等.CFRP复合材料加固钢筋混凝土柱偏心受压性能尺寸效应的试验[J].复合材料学报,2019,36(5):1275-1283.DOI:10.13801/j.cnki.fhclxb.20180709.001.
WANG Zuohu, LIU Du, YUAN Feifan, et al. Experimental study on size effect of reinforced concrete columns strengthened with CFRP composite under eccentric loads[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2019, 36(5): 1275-1283. DOI:10.13801/j.cnki.fhclxb.20180709.001.(in Chinese)

[8] BAI Y L,DAI J G,TENG J G.Cyclic compressive behavior of concrete confined with large rupture strain FRP composites[J]. Journal of Composites for Construction, 2014, 18: 04013025. DOI:10.1061/(ASCE)cc.1943-5614.0000386.

[9] 尚守平,彭晖,童桦,等.预应力碳纤维布材加固混凝土受弯构件的抗弯性能研究[J].建筑结构学报,2003,24(5):24-30.DOI:10.14006/j.jzjgxb.2003.05.004.
SHANG Shouping, PENG Hui, TONG Hua, et al. Study of strengthening reinforced concrete beam using prestressed carbon fiber sheet[J].Journal of Building Structures,2003,24(5):24-30. DOI:10.14006/j.jzjgxb.2003.05.004.(in Chinese)

[10] MOHAMED H M, MASMOUDI R. Flexural strength and behavior of steel and FRP-reinforced concrete-filled FRP tube beams[J]. Engineering Structures, 2010, 32(11): 3789-3800.DOI:10.1016/j.engstruct.2010.08.023.

[11] LIAO F Y, HOU C, ZHANG W J, et al. Experimental investigation on sea sand concrete-filled stainless steel tubular stub columns[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2019,155:46-61.DOI:10.1016/j.jcsr.2018.12.009.

[12] DONG Z Q,SUN Y,ZHU H,et al.Behavior and modeling of seawater sea-sand coral aggregate concrete-filled BFRP tubular columns under eccentric compression[J]. Composite Structures, 2022, 288: 115392. DOI: 10.1016/j. compstruct. 2022.115392.

[13] LI Y L, ZHAO X L, SINGH RAMAN R K. Mechanical properties of seawater and sea sand concrete-filled FRP tubes in artificial seawater [J]. Construction and Building Materials, 2018,191:977-993.DOI:10.1016/j.conbuildmat.2018.10.059.

[14] WANG X Q, TAO Z, SONG T Y, et al. Stress-strain model of austenitic stainless steel after exposure to elevated temperatures [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2014,99:129-139.DOI:10.1016/j.jcsr.2014.04.020.

[15] IMRAN M, MAHENDRAN M, KEERTHAN P. Experimental and numerical investigations of CFRP strengthened short SHS steel columns [J]. Engineering Structures, 2018, 175: 879-894. DOI: 10.1016/j. engstruct. 2018.08.042.