

一类分数次奥里奇-索勃列夫空间的 逐点不等式特征^{*}

胡家豪¹⁾, 孙鸿雁^{1)†}, 孙一兵²⁾

(1) 中国地质大学(北京)数理学院, 北京; 2) 北京师范大学数学科学学院, 北京)

摘要 通过 Hajlasz 型上梯度, 建立了与连续模及 Young 函数相应的分数次奥里奇(Orlicz)-索勃列夫(Sobolev)空间的逐点不等式.

关键词 奥里奇-索勃列夫空间; 连续模; Young 函数; 逐点特征; Hajlasz 上梯度

中图分类号 G642.0; O177.3

DOI: 10.12202/j.0476-0301.2025189

0 引言

函数 $\omega: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 称为连续模, 若 ω 单调递增、连续且满足

$$\begin{aligned} \omega(0) &= 0, \\ \forall t > 0, \omega(t) &> 0, \end{aligned}$$

称 $A: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 为 Young 函数. A 凸, 且满足

$$\begin{aligned} A(0) &= 0, \\ \forall t > 0, A(t) &> 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) &= \infty. \end{aligned}$$

对 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数 u , 其相应于连续模 ω 及 Young 函数 A 的 Luxemburg 半范数为

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)} := \inf \left\{ \lambda > 0: \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\lambda \omega(|x - y|)} \right) \frac{dx dy}{|x - y|^n} \leq 1 \right\}.$$

由此, 定义相应于 ω 及 A 的齐次奥里奇(Orlicz)-索勃列夫(Sobolev)空间 $\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)$ 为所有满足 $\|u\|_{\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ 的函数 u 构成的空间. 已知, 模去常数后, $\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach 空间.

对于 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数 u , 称非负可测函数序列 $\vec{g} = \{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为其一个 ω -Hajlasz 梯度, 若存在零测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 使得当

$$\begin{aligned} x, y &\in \mathbb{R}^n \setminus E, \\ 2^{-k-1} &\leq |x - y| < 2^{-k} \end{aligned}$$

时, 有

$$|u(x) - u(y)| \leq \omega(|x - y|) [g_k(x) + g_k(y)].$$

记 u 的全体 ω -Hajlasz 梯度为 $\mathcal{D}^\omega(u)$. 由此, 相应于连续模 ω 及 Young 函数 A , 定义 Hajlasz 意义下的 Orlicz-Sobolev 空间的半范数为

$$\|u\|_{\dot{M}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)} := \inf_{\vec{g} \in \mathcal{D}^\omega(u)} \inf \left\{ \lambda > 0: \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A \left(\frac{g_k}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}.$$

Hajlasz 型 Orlicz-Sobolev 空间 $\dot{M}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)$ 由满足

$$\|u\|_{\dot{M}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

的全体函数 u 所构成.

定理 1 假设连续模 ω 满足增长性条件

$$\begin{cases} K_0 := \sup_{t>0} \int_0^t \frac{\omega(s)}{\omega(t/64)} \frac{ds}{s} < \infty, \\ K_\infty := \sup_{t>0} \int_t^\infty \frac{\omega(64t)}{\omega(s)} \frac{ds}{s} < \infty, \end{cases} \quad (1)$$

则

$$\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n) = \dot{M}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n),$$

且其半范数等价.

关于这一结果, 有如下注, 其中 χ_I 表示集合 $I \subset [0, \infty)$ 的特征函数.

注 1 满足式(1)的连续模有

$$\begin{aligned} \omega(t) &= t^\beta, \quad \beta > 0, \\ \omega(t) &= t^{\beta_1} \chi_{[0 \leq t < 1]} + t^{\beta_2} \chi_{[t \geq 1]}, \quad \beta_1, \beta_2 > 0, \\ \omega(t) &= t^\beta \ln^\alpha(1/t) \chi_{[0 \leq t < e^{-1/\alpha}]} + \beta^{-\alpha} t^\beta \chi_{[t \geq e^{-1/\alpha}]}, \quad \alpha > 0, \beta \in (0, 1), \\ \omega(t) &= t^\beta \chi_{[0 \leq t < e^{1/\alpha}]} + \beta^\alpha t^\beta \ln^\alpha(t) \chi_{[t \geq e^{1/\alpha}]}, \quad \alpha > 0, \beta \in (0, 1). \end{aligned}$$

式(1)成立的必要条件是 ω 满足 2 倍, 即存在常数

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12271043, 12025102); 中央高校基本科研业务资助项目(223300008)

[†] 通信作者: 孙鸿雁(1985—), 副教授, 博士. 研究方向: 随机分析、泛函不等式. E-mail: sun_hy@cugb.edu.cn

收稿日期: 2025-10-02

$C > 1$, 使得对所有的 $t > 0$, 有

$$\omega(2t) \leq C\omega(t).$$

因此,

$$\omega(t) = (e^t - 1)^\beta$$

和

$$\omega(t) = [\ln(1+t)]^\beta$$

均不满足式(1), 式中 $\beta > 0$.

注2 1) 假设

$$\omega(s) = s^\beta, \quad \beta \in (0, \infty),$$

$$A(t) = t^p, \quad p \in [1, \infty),$$

空间 $\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)$ 即为 $\dot{W}^{\beta, p}(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|\cdot\|_{\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)}$ 为

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n + \beta p}} dx dy \right)^{1/p}. \quad (2)$$

当 $\beta \in (0, 1)$ 时为经典分数次 Sobolev 空间 $\dot{W}^{\beta, p}(\mathbb{R}^n)$, 且包含 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (全体光滑且具有紧支集函数); 当 $\beta \in [1, \infty)$ 时, $\dot{W}^{\beta, p}(\mathbb{R}^n)$ 只包含常值常数^[1].

2) 一般地, 假设 (ω, A) 满足如下增长性条件

$$\begin{cases} \int_0^1 A\left(\frac{s}{\omega(s)}\right) \frac{ds}{s} < \infty, \\ \int_1^\infty A\left(\frac{1}{\omega(s)}\right) \frac{ds}{s} < \infty, \end{cases} \quad (3)$$

则

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n).$$

参见引理2.

当不满足式(3)时, 一般情况下, $\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)$ 不一定包含 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

事实上, 若

$$A(t) = t^p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

则

$$\omega(s) = s^\beta$$

满足式(3), 当且仅当 $0 < \beta < 1$.

当 $\beta \geq 1$ 时,

$$\dot{W}^{\beta, p}(\mathbb{R}^n) = \dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)$$

只包含常数, 在这个意义下式(3)具有最优性.

注3 假设

$$\omega(s) = s^\beta, \quad \beta \in (0, 1),$$

$$A(t) = t^p, \quad p \in [1, \infty).$$

Hajlasz 型空间 $\dot{M}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)$ 正好是 Koskela 等^[2-3] 引进的 Hajlasz 型 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{M}_{p, p}^\beta(\mathbb{R}^n)$, 且范数 $\|\cdot\|_{\dot{M}_{p, p}^\beta(\mathbb{R}^n)}$ 为

$$\|u\|_{\dot{M}_{p, p}^\beta(\mathbb{R}^n)} := \inf_{g \in \mathcal{D}^\beta(u)} \|\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

式中 $\mathcal{D}^\beta(u)$ 为 $\omega(t) = t^\beta$ 时的 $\mathcal{D}^\omega(u)$.

Hajlasz-Sobolev 空间最初由 Hajlasz^[4] 提出, 更多与 Hajlasz-Sobolev 空间相关结果可参见文献^[5-7].

Koskela 等^[3] 证明了

$$\dot{M}_{p, p}^\beta(\mathbb{R}^n) = \dot{W}^{\beta, p}(\mathbb{R}^n),$$

且(半)范数等价, 从而给出了空间 $\dot{W}^{\beta, p}(\mathbb{R}^n)$ 的一个逐点特征刻画.

1 预备知识

引理1^[8] 设 (X, μ) 为测度空间且 $\mu(X) = 1$, 若 $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数, 则对 $L^1(X, \mu)$ 中任意的 $f: X \rightarrow [a, b]$, 都有

$$A\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X A \circ f d\mu.$$

特别地, 对于

$$\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [0, 1],$$

若

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1,$$

$$\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [a, b],$$

则

$$A\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A(a_j).$$

下面证明式(3)保证了空间 $\dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n)$ 非平凡.

引理2 若式(3)成立, 则

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n).$$

证明 设

$$0 \neq u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{supp } u \subset B(0, R).$$

为证

$$u \in \dot{W}^{\omega, A}(\mathbb{R}^n),$$

只需证明存在 $\lambda > 0$, 使得

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\lambda \omega(|x - y|)}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^n} < \infty.$$

注意到

$$I(\lambda) = \int_{B(0, 2R)} \int_{B(0, 2R)} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\lambda \omega(|x - y|)}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^n} +$$

$$2 \int_{B(0, 2R)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2R)} A\left(\frac{|u(x)|}{\lambda \omega(|x - y|)}\right) \frac{dy dx}{|x - y|^n} = I_1(\lambda) + I_2(\lambda).$$

令

$$\lambda = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

对于 $I_1(\lambda)$, 由

$$|u(x) - u(y)| \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x - y| \leq \lambda |x - y|$$

可知

$$I_1(\lambda) \leq \int_{B(0,2R)} \int_{B(0,2R)} A\left(\frac{|x-y|}{\omega(|x-y|)}\right) \frac{dy dx}{|x-y|^n}.$$

观察到当 $x \in B(0,2R)$ 时, 有

$$B(0,2R) \subset B(x,4R).$$

由式(3)进一步可得

$$I_1(\lambda) \leq \int_{B(0,2R)} \int_{B(x,4R)} A\left(\frac{|x-y|}{\omega(|x-y|)}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} dx = CR^n \int_0^{2R} A\left(\frac{s}{\omega(s)}\right) \frac{ds}{s} < \infty.$$

对于 $I_2(\lambda)$, 由于 u 在 $B(0,2R) \setminus B(0,R)$ 上为 0, 因此

$$I_2(\lambda) = 2 \int_{B(0,R)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,2R)} A\left(\frac{|u(x)|}{\lambda \omega(|x-y|)}\right) \frac{dy dx}{|x-y|^n}.$$

当 $x \in B(0,R)$ 时, 有

$$B(x,R) \subset B(0,2R),$$

因此, 由式(3)可得

$$I_2(\lambda) \leq 2 \int_{B(0,R)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)} A\left(\frac{1}{\omega(|x-y|)}\right) \frac{dy dx}{|x-y|^n} = CR^n \int_R^\infty A\left(\frac{1}{\omega(s)}\right) \frac{ds}{s} < \infty,$$

从而

$$I(\lambda) < \infty.$$

证毕.

2 定理 1 的证明

首先证明

$$\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n).$$

注意到该结论不需要任何其他假设.

引理 3 对任意连续模 ω 和 Young 函数 A , 总有

$$\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n),$$

且有范数控制.

证明 设 $u \in \dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)$. 由定义, 对任意的 $\epsilon \in (0,1)$, 存在

$$\vec{g} = \{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{D}^\omega(u),$$

使得

$$\|u\|_{\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} \leq \inf \left\{ \lambda > 0: \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A\left(\frac{g_k}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\} \leq \|u\|_{\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} + \epsilon.$$

进而存在

$$\|u\|_{\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda \leq \|u\|_{\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} + 2\epsilon,$$

使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A\left(\frac{g_k}{\lambda}\right) dx \leq 1.$$

下证 $u \in \dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)}.$$

只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{2\lambda\omega(|x-y|)}\right) \frac{dy dx}{|x-y|^n} \leq C_0,$$

式中 C_0 是与 u 无关的常数, 且 $C_0 > 0$.

事实上, 由凸性可知

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{2(1+C_0)\lambda\omega(|x-y|)}\right) \frac{dy dx}{|x-y|^n} \leq 1,$$

从而

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} \leq 2(1+C_0)\lambda \leq 2(1+C_0)[\|u\|_{\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} + \epsilon].$$

由 ϵ 的任意性, 可知

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)}.$$

由于 $\vec{g} \in \mathcal{D}^\omega(u)$, 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{2\lambda\omega(|x-y|)}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} \leq \\ & C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kn} \int_{R(x,2^{-k-1},2^{-k})} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{2\lambda\omega(|x-y|)}\right) dy \leq \\ & C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kn} \int_{R(x,2^{-k-1},2^{-k})} A\left(\frac{g_k(x) + g_k(y)}{2\lambda}\right) dy, \end{aligned}$$

式中

$$R(x,a,b) := \{y \in \mathbb{R}^n: a \leq |y-x| < b\}.$$

由 A 的凸性, 可知

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{2\lambda\omega(|x-y|)}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} \leq \\ & C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kn} \int_{R(x,2^{-k-1},2^{-k})} \left[A\left(\frac{g_k(x)}{\lambda}\right) + A\left(\frac{g_k(y)}{\lambda}\right) \right] dy. \end{aligned}$$

对该式关于 x 积分后, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{2\lambda\omega(|x-y|)}\right) \frac{dy dx}{|x-y|^n} \leq \\ & C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{g_k(x)}{\lambda}\right) dx + 2^{kn} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{R(x,2^{-k-1},2^{-k})} A\left(\frac{g_k(y)}{\lambda}\right) dy dx \right] = \\ & C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{g_k(x)}{\lambda}\right) dx + 2^{kn} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{R(y,2^{-k-1},2^{-k})} A\left(\frac{g_k(y)}{\lambda}\right) dx dy \right] \leq \\ & C \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A\left(\frac{g_k(x)}{\lambda}\right) dx \leq C. \end{aligned}$$

证毕.

反之,在式(1)下有如下结果.

引理4 在式(1)下,有

$$\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n),$$

且有范数控制.

证明 设 $u \in \dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)$, 要证 $u \in \dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|u\|_{\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)}.$$

不妨设

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} > 0,$$

否则

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

此时 u 为常函数, 显然有

$$u \in \dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n),$$

且

$$\|u\|_{\dot{M}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

考虑

$$u/\|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)},$$

可进一步假设

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} = 1.$$

对 $j \in \mathbb{Z}$, 令

$$h_j(x) := A^{-1} \left[\int_{B(x, 2^{-j})} \int_{R(x, 2^{-j-1}, 2^{-j})} A \left(\frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w - z|)} \right) dz dw \right]. \quad (4)$$

对 u 的 Lebesgue 点 x, y , 当

$$\begin{aligned} |u(x) - u_{B(x, 2^{-j})}| &\leq C \sum_{j \geq k} \omega(2^{-j+3}) \int_{B(x, 2^{-j})} \int_{R(x, 2^{-j-1}, 2^{-j})} \frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w - z|)} dz dw = \\ &C \sum_{j \geq k} \omega(2^{-j+3}) A^{-1} \circ A \left[\int_{B(x, 2^{-j})} \int_{R(x, 2^{-j-1}, 2^{-j})} \frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w - z|)} dz dw \right] \leq \\ &C \sum_{j \geq k} \omega(2^{-j+3}) A^{-1} \left[\int_{R(x, 2^{-j-1}, 2^{-j})} A \left(\frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w - z|)} \right) dz dw \right]. \end{aligned}$$

由 h_j 的定义可知

$$|u(x) - u_{B(x, 2^{-j})}| \leq C \sum_{j \geq k} \omega(2^{-j+3}) h_j(x).$$

类似地

$$|u(y) - u_{B(y, 2^{-k+1})}| \leq C \sum_{j \geq k-1} \omega(2^{-j+3}) h_j(y).$$

利用相似性可得

$$\begin{aligned} |u_{B(y, 2^{-k+1})} - u_{B(x, 2^{-k})}| &\leq |u_{B(y, 2^{-k+1})} - u_{R(y, 2^{-k+2}, 2^{-k+3})}| + |u_{R(y, 2^{-k+2}, 2^{-k+3})} - u_{B(x, 2^{-k})}| \leq \\ &C \omega(2^{-k+4}) h_{k-1}(y) + \int_{B(x, 2^{-k})} |u(z) - u_{R(y, 2^{-k+2}, 2^{-k+3})}| dz \leq \\ &C \omega(2^{-k+4}) h_{k-1}(y) + C \int_{B(y, 2^{-k+1})} |u(z) - u_{R(y, 2^{-k+2}, 2^{-k+3})}| dz \leq C \omega(2^{-k+4}) h_{k-1}(y). \end{aligned}$$

$$2^{-k-1} \leq |x - y| < 2^{-k}$$

时, 有

$$|u(x) - u(y)| \leq C_0 \sum_{j \geq k-1} \omega(2^{-j+3}) [h_j(x) + h_j(y)], \quad (5)$$

式中 C_0 依赖于 n .

为证明式(5), 注意到

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_{B(x, 2^{-k})}| + |u(y) - u_{B(y, 2^{-k+1})}| + |u_{B(y, 2^{-k+1})} - u_{B(x, 2^{-k})}|.$$

由于

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{B(x, 2^{-j})} = u(x),$$

对 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned} |u(x) - u_{B(x, 2^{-k})}| &\leq \sum_{j \geq k} |u_{B(x, 2^{-j})} - u_{B(x, 2^{-j-1})}| \leq \\ &\sum_{j \geq k} |u_{B(x, 2^{-j})} - u_{R(x, 2^{-j-1}, 2^{-j})}| + \\ &\sum_{j \geq k} |u_{B(x, 2^{-j-1})} - u_{R(x, 2^{-j-1}, 2^{-j})}| \leq \\ &C \sum_{j \geq k} \int_{B(x, 2^{-j})} \int_{R(x, 2^{-j-1}, 2^{-j})} |u(w) - u(z)| dz dw, \end{aligned}$$

式中

$$R(x, a, b) := \{y \in \mathbb{R}^n : a \leq |y - x| < b\}.$$

当 $w \in B(x, 2^{-j})$ 、 $z \in R(x, 2^{-j-1}, 2^{-j})$ 时, 有

$$2^{-j} \leq |w - z| \leq 5 \cdot 2^{-j} \leq 2^{-j+3},$$

从而, 由 Jensen 不等式可得

故式(5)成立.

对 $k \in \mathbb{Z}$, 记

$$g_k(x) := C_0 \sum_{j \geq k-1} \frac{\omega(2^{-j+3})}{\omega(2^{-k-1})} h_j(x),$$

$$\vec{g} = \{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

式(5)说明, 对几乎所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 若

$$2^{-k-1} \leq |x-y| < 2^{-k},$$

则

$$|u(x) - u(y)| \leq \omega(|x-y|)(g_k(x) + g_k(y)),$$

即

$$\vec{g} \in \mathcal{D}^\omega(u).$$

证明存在常数 $C, C' \geq 1$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A\left(\frac{g_k}{C}\right) dx \leq C'. \quad (6)$$

注意到凸性, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A\left(\frac{g_k}{CC'}\right) dx \leq 1.$$

由此及定义, 可知

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} \leq CC' = CC' \|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)}.$$

下证式(6).

由于连续模 ω 满足式(1), 对于 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\omega(2^{-k-1}) \geq K_0^{-1} \int_0^{2^{-k+5}} \frac{\omega(s)}{s} ds = K_0^{-1} \sum_{j \geq k-1} \int_{2^{-j+3}}^{2^{-j+4}} \frac{\omega(s)}{s} ds \geq$$

$$K_0^{-1} \sum_{j \geq k-1} \omega(2^{-j+3}),$$

故

$$\sum_{j \geq k-1} \frac{\omega(2^{-j+3})}{K_0 \omega(2^{-k-1})} \leq 1.$$

由 Jensen 不等式及 $A(0) = 0$, 可知

$$A\left(\frac{g_k(x)}{C_0 K_0}\right) = A\left(\sum_{j \geq k-1} \frac{\omega(2^{-j+3})}{K_0 \omega(2^{-k-1})} h_j(x)\right) =$$

$$A\left[\sum_{j \geq k-1} \frac{\omega(2^{-j+3})}{K_0 \omega(2^{-k-1})} h_j(x) + \left(1 - \sum_{j \geq k-1} \frac{\omega(2^{-j+3})}{K_0 \omega(2^{-k-1})}\right) \cdot 0\right] \leq$$

$$\sum_{j \geq k-1} \frac{\omega(2^{-j+3})}{K_0 \omega(2^{-k-1})} A(h_j(x)),$$

所以

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A\left(\frac{g_k(x)}{C_0 K_0}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \geq k-1} \frac{\omega(2^{-j+3})}{K_0 \omega(2^{-k-1})} A(h_j(x)) dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \leq j+1} \frac{\omega(2^{-j+3})}{\omega(2^{-k-1})} A(h_j(x)) dx.$$

由式(1), 对于 $j \in \mathbb{Z}$, 有

$$\frac{1}{\omega(2^{-j+3})} \geq K_\infty^{-1} \int_{2^{-j+3}}^\infty \frac{1}{\omega(s)} \frac{ds}{s} =$$

$$K_\infty^{-1} \sum_{k \leq j+1} \int_{2^{-k+2}}^{2^{-k+1}} \frac{1}{\omega(s)} \frac{ds}{s} \geq K_\infty^{-1} \sum_{k \leq j+1} \frac{1}{\omega(2^{-k-1})},$$

故

$$\sum_{k \leq j+1} \frac{\omega(2^{-j+3})}{\omega(2^{-k-1})} \leq K_\infty.$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A\left(\frac{g_k(x)}{C_0 K_0}\right) dx \leq K_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} A(h_j(x)) dx. \quad (7)$$

另一方面, 由式(4)可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} A(h_j(x)) dx =$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(x, 2^{-j})} \int_{R(x, 2^{-j+1}, 2^{-j+2})} A\left(\frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w-z|)}\right) dz dw dx.$$

交换积分次序, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} A(h_j(x)) dx =$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(w, 2^{-j})} \int_{R(x, 2^{-j+1}, 2^{-j+2})} A\left(\frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w-z|)}\right) dz dx dw.$$

当 $x \in B(w, 2^{-j})$ 时, 有

$$R(x, 2^{-j+1}, 2^{-j+2}) \subset R(w, 2^{-j}, 2^{-j+3}).$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} A(h_j(x)) dx \leq$$

$$C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(w, 2^{-j})} \int_{R(w, 2^{-j}, 2^{-j+3})} A\left(\frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w-z|)}\right) dz dx dw =$$

$$C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{R(w, 2^{-j}, 2^{-j+3})} A\left(\frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w-z|)}\right) dz dw \leq$$

$$C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{R(w, 2^{-j}, 2^{-j+3})} A\left(\frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w-z|)}\right) \frac{dz dw}{|w-z|^n}.$$

利用有限重叠可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} A(h_j(x)) dx \leq$$

$$C \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(w) - u(z)|}{\omega(|w-z|)}\right) \frac{dz dw}{|w-z|^n} \leq C.$$

该不等式假设

$$\|u\|_{\dot{W}^{\omega,A}(\mathbb{R}^n)} = 1$$

直接成立, 结合式(7), 即可推得式(6).

证毕.

结合引理 3 和 4 可知定理 1 成立.

3 结束语

理解可微性、(偏)导数、积分,以及微积分基本定理是分析学的基础,相关内容贯穿数学分析、实变函数与泛函分析等核心课程.

设 $1 < p < +\infty$, 一阶 p 次 Sobolev 空间 $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 有多种等价定义方式. 例如:

1) 紧支集光滑函数全体在(半)范数 $\|\cdot\|_{\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ 下完备化后所得空间, 其中光滑函数 f 的范数定义为 $\|f\|_{\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, 注意到光滑函数导数处处存在;

2) 分布偏导数 Df 属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的全体局部可积函数, 其中分布偏导数是通过分部积分来定义;

3) 在几乎所有平行于坐标轴的直线上绝对连续且偏导数具有 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 可积性的全体函数. 实变函数理论保证了此时偏导数几乎处处存在.

第1)种方式中, 完备化后的函数虽然可由光滑函数逼近, 但对其理解不够直观和形象; 第2)种方式对于非光滑函数分布偏导数是泛函意义下对导数的推广, 对其理解本身就是一个难点; 第3)种方式对几乎所有平行于坐标轴的直线上绝对连续这一概念及此时偏导数几乎处处存在的理解, 需要深刻的实变函数理论及技巧, 对分析基础的要求很高.

本文进一步拓展到分数次 Orlicz-Sobolev 空间, 即函数的 ω -上梯度列属于向量值 Orlicz 空间的函数全

体, 并将对该空间的理解统一到 Hajlasz 基于逐点不等式理解 Sobolev 空间的框架下. 这对于学习、理解和应用这一空间提供了便利.

4 参考文献

- [1] Gogatishvili A, Koskela P, Zhou Y. Characterizations of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on metric measure spaces[J]. *Forum Mathematicum*, 2013, 25(4): 787
- [2] Koskela P, Yang D C, Zhou Y. A characterization of Hajlasz-Sobolev and Triebel-Lizorkin spaces via grand Littlewood-Paley functions[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2010, 258(8): 2637
- [3] Koskela P, Yang D C, Zhou Y. Pointwise characterizations of Besov and Triebel-Lizorkin spaces and quasiconformal mappings[J]. *Advances in Mathematics*, 2011, 226(4): 3579
- [4] Hajlasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space[J]. *Potential Analysis*, 1996, 5(4): 403
- [5] Hajlasz P. Sobolev spaces on metric-measure spaces[EB/OL]. [2025-09-15]. <https://pubs.ams.org/ebooks/conm/338/>
- [6] Hajlasz P, Koskela P. Sobolev met Poincaré[M]. Providence: American Mathematical Society, 2000
- [7] Yang D C. New characterizations of Hajlasz-Sobolev spaces on metric spaces[J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2003, 46(5): 675
- [8] Folland G B. Real analysis[M]. New York: Wiley, 1999

Pointwise characterization of a class of fractional Orlicz-Sobolev spaces

Hu Jiahao¹⁾, Sun Hongyan¹⁾, Sun Yibing²⁾

(1) School of Science, China University of Geosciences (Beijing), Beijing, China;

2) School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, China)

Abstract Using Hajlasz-type upper gradients, pointwise inequalities for fractional Orlicz-Sobolev spaces associated with a modulus of continuity and Young functions are established.

Keywords Orlicz-Sobolev space; modulus of continuity; Young function; pointwise characterization; Hajlasz gradient

【责任编辑: 陆有忠】