doi:10.16018/j.cnki.cn32-1650/n.202504010

自平衡条件下单箱三室箱形梁竖向挠度研究

刘浩然,甘亚南,唐洁茹,章文政
(盐城工学院 土木工程学院,江苏 盐城　224051)

摘要:综合考虑Timoshenko剪切变形、剪力滞效应和剪滞翘曲应力自平衡条件等因素,获得该类结构总势能;利用能量变分法推导出单箱三室箱形梁的弹性控制微分方程,继而实现该控制微分方程的求解;最后通过数值模拟进行验证,结果表明:箱梁竖向位移为欧拉梁理论、Timoshenko剪切变形、剪力滞和剪滞翘曲应力自平衡条件的叠加;在均布荷载下,箱梁跨径越小,剪切变形和剪力滞效应对箱梁竖向挠度的影响越大;集中荷载下,Timoshenko剪切变形对竖向挠度无影响,但剪力滞效应影响明显增加;本文推导理论值计算精度最高,且与有限元法计算值吻合较好,其误差皆在5%以内。

关键词:能量变分法;自平衡条件;剪力滞后;单箱三室箱梁;竖向挠度
中图分类号:U448.22　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2025)04-0070-07

近几十年来,世界大跨径桥梁中,箱形断面为桥梁结构的首选形式[1-5],如上海的南浦大桥以及江苏苏通长江大桥引桥等皆为单箱三室截面梁。又由于单箱三室箱梁具有桥面宽度大、整体刚度强、抗弯和抗扭力学性能均衡等特点[6-7],该类箱形梁桥经常应用于双向多车道公路、城市快速路以及大跨度轨道交通桥梁中。但是,在弯曲荷载作用下,单箱三室箱梁剪力滞后现象会进一步减小箱形梁的面内刚度[8-11],这不仅影响其钢筋和预应力筋的优化布置,更可能使该类结构在长期荷载作用下出现梁体开裂范围扩大、跨中下挠超出规范限值等病害[12-14],进而威胁该类桥梁的通行安全与使用寿命。

本文在考虑单箱三室箱梁剪力滞后效应,以及铁木辛柯剪切变形在多腹板结构中对挠度计算影响等因素的基础上,开展单箱三室箱梁挠度的精细化分析,深入探索了单箱三室箱梁在挠度控制方面的力学特性,明确影响挠度变形的关键因素与作用机制,为单箱三室箱梁的耐久性研究奠定坚实基础,更为同类桥梁结构的挠度限值设计提供参考[10,12]。

1　考虑自平衡条件矩形箱梁的控制微分方程和自然边界条件

1.1　体系总势能

单箱三室箱形矩形箱梁截面如图1所示。图1中,以三室箱形矩形箱梁截面形心O为原点,以截面横向为x轴、截面竖向为y轴、箱梁跨径方向为z轴建立笛卡尔坐标系。若箱梁跨径为L,在对称弯曲状态下,翼板翘曲位移为:

$$\begin{cases} u_1 = h_1\theta + \left[M_{01} - h_1\varphi_1(x)\right]U_1(z) + M_{02}U_2(z) \\ u_2 = h_1\theta + \left[M_{02} - h_1\varphi_2(x)\right]U_2(z) + M_{01}U_1(z) \\ u_3 = -h_2\theta + \left[M_{02} + h_2\varphi_2(x)\right]U_2(z) + M_{01}U_1(z) \end{cases} \tag{1}$$

其中,$\varphi_1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{b_1^2}$,$0 \leqslant x \leqslant b_1$

$$\varphi_2(x) = 1 - \frac{x^2}{b_2^2},\ 0 \leqslant x \leqslant b_2$$

式中:u_1、u_2、u_3分别为悬臂板、上翼板、下翼板的纵向位移;h_1为悬臂板与上翼板的中线到x轴的距离;h_2为下翼板中线到x轴的距离;θ为截面竖

收稿日期:2025-09-19
基金项目:甘肃省科技重大专项项目(19ZD2GA002);2024年盐城工学院研究生创新计划项目(KYCX24_XZ047)。
作者简介:刘浩然(2001—),男,江苏徐州人,硕士生,主要研究方向为桥梁结构耐久性设计。
通信作者:甘亚南(1968—),男,山东济宁人,教授,博士,主要研究方向为桥梁工程。

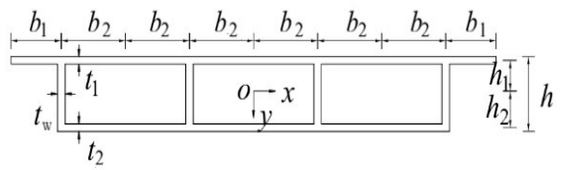


图 1　单箱三室箱形梁截面图

Fig. 1　Cross section of a single-box three-cell box girder

向转角；M_{01} 为悬臂板满足剪滞翘曲应力自平衡条件的常系数；M_{02} 为上翼板和下翼板满足剪滞翘曲应力自平衡条件的常系数；$\varphi_1(x)$ 为悬臂板的翘曲位移；$\varphi_2(x)$ 为上翼板和下翼板的翘曲位移；$U_1(z)$ 为剪力滞后效应引起箱梁悬臂板的纵向位移差；$U_2(z)$ 为剪力滞后效应引起箱梁上下翼板的纵向位移差；b_1 为单侧悬臂板的横向长度；b_2 为单个箱室横向长度的一半。

由于翼板正应力为翼板纵向位移对 z 的导数与材料杨氏弹性模量 E 的乘积，而腹板正应力为翼板纵向位移对 z 的导数与材料剪切弹性模量 G 的乘积，则翼板正应力可表示为：

$$\begin{cases} \sigma_1 = E\left\{\begin{matrix} h_1\theta' + \left[M_{01} - h_1\varphi_1(x)\right]U_1'(z) + \\ M_{02}U_2'(z) \end{matrix}\right\} \\ \sigma_2 = E\left\{\begin{matrix} h_1\theta' + \left[M_{02} - h_1\varphi_2(x)\right]U_2'(z) + \\ M_{01}U_1'(z) \end{matrix}\right\} \\ \sigma_3 = E\left\{\begin{matrix} -h_2\theta' + \left[M_{02} + h_2\varphi_2(x)\right]U_2'(z) + \\ M_{01}U_1'(z) \end{matrix}\right\} \end{cases} \tag{2}$$

式中：σ_1、σ_2、σ_3 分别为悬臂板、上翼板、下翼板的正应力；θ'、$U_1'(z)$、$U_2'(z)$ 分别为 θ、$U_1(z)$、$U_2(z)$ 对 z 的偏导数。

翼板剪应力可表示为：

$$\begin{cases} \tau_1 = Gh_1\dfrac{2x}{b_1^2}U_1(z) \\ \tau_2 = Gh_1\dfrac{2x}{b_2^2}U_2(z) \\ \tau_3 = -Gh_2\dfrac{2x}{b_2^2}U_2(z) \end{cases} \tag{3}$$

式中：τ_1、τ_2、τ_3 分别为悬臂板、上翼板、下翼板的剪应力。

腹板正应力可表示为：

$$\sigma_f = E\left[y\theta' + M_{01}U_1'(z) + M_{02}U_2'(z)\right] \tag{4}$$

式中：σ_f 为腹板正应力；y 为以箱梁截面形心 O 为原点的竖向坐标。

同时，由剪滞翘曲应力自平衡条件可得：

$$\begin{cases} M_{01} = \dfrac{4h_1b_1t_1}{3A} \\ M_{02} = \dfrac{4b_2(h_1t_1 - h_2t_2)}{A} \end{cases} \tag{5}$$

其中，$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_f$

式中：t_1、t_2 分别为上、下翼板的厚度；A_1、A_2、A_3、A_f 分别为悬臂板、上翼板、下翼板和腹板的面积。

那么，悬臂板、上翼板和下翼板的变形势能总和 V_1 为：

$$V_1 = \frac{1}{2}\iint_{A_v}\int_0^L\left(\frac{\sigma_1^2}{E} + \frac{\tau_1^2}{G} + \frac{\sigma_2^2}{E} + \frac{\tau_2^2}{G} + \frac{\sigma_3^2}{E} + \frac{\tau_3^2}{G}\right)\mathrm{d}A_v\mathrm{d}z \tag{6}$$

式中：$A_v = A_1 + A_2 + A_3$。

腹板的变形势能 V_2 为：

$$V_2 = \frac{1}{2}\iint_{A_f}\int_0^L\frac{\sigma_f^2}{E}\mathrm{d}A_f\mathrm{d}z \tag{7}$$

箱梁剪切应变能 V_3 为：

$$V_3 = \frac{1}{2}\int_0^L kGA\left(\theta - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\mathrm{d}z \tag{8}$$

式中：k 为截面形状系数；w 为截面的竖向挠度。

矩形箱梁荷载势能 V_p 为：

$$V_p = -\int_0^L q_y(z)w(z)\mathrm{d}z - \left[Q(z)w(z)\right]\Big|_0^L - \left[M_1(z)U_1(z) + M_2(z)U_2(z) + M_z(z)\theta(z)\right]\Big|_0^L \tag{9}$$

式中：$q_y(z)$ 为箱梁上竖向分布力；$Q(z)$ 为梁段端竖向剪力；$M_1(z)$ 为矩形箱梁悬臂板剪滞效应产生的关于 x 轴的弯矩；$M_2(z)$ 为上下翼板剪滞效应产生的关于 x 轴的弯矩；$M_z(z)$ 为梁段端产生竖向转角 $\theta(z)$ 时关于 x 轴的弯矩。

系统总势能为：

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_P \tag{10}$$

式中：V 为系统总势能；(x,y,z) 为以截面形心为原点的坐标。

1.2　弹性控制微分方程及自然边界条件

根据能量变分法 $\delta V = 0$，可得矩形箱梁控制微分方程为：

$$\begin{cases} EI\theta'' + EI_3U_1'' + EI_4U_2'' + kGA(\theta - w') = 0 \\ EI_3\theta'' + EI_1U_1'' + EI_5U_2'' - GI_{G1}U_1 = 0 \\ EI_4\theta'' + EI_5U_1'' + EI_2U_2'' - GI_{G2}U_2 = 0 \\ kGA(\theta' - w'') - q_y = 0 \end{cases} \tag{11}$$

其中，

$$I = h_1^2A_1 + 3h_1^2A_2 + 3h_2^2A_3 + I_f,$$

$$I_1 = M_{01}^2 A + \frac{16}{15} h_1^2 b_1 t_1 - \frac{8}{3} M_{01} h_1 b_1 t_1,$$
$$I_2 = M_{02}^2 A + 8 M_{02} b_2 (h_2 t_2 - h_1 t_1) + \frac{16}{5} b_2 (h_2^2 t_2 + h_1^2 t_1),$$
$$I_3 = -\frac{4}{3} h_1^2 b_1 t_1,$$
$$I_4 = -4 h_1^2 b_2 t_1 - 4 h_2^2 b_2 t_2,$$
$$I_5 = M_{01} M_{02} A + 4 M_{02} h_2 b_2 t_2 - 4 M_{01} h_1 b_2 t_1 - \frac{4}{3} M_{02} h_1 b_1 t_1,$$
$$I_{G1} = \frac{8 h_1^2 t_1}{3 b_1},$$
$$I_{G2} = \frac{8 h_1^2 t_1 + 8 h_2^2 t_2}{b_2}$$

式中:I_f为腹板关于x轴的惯性矩。

矩形箱梁自然边界条件为:

$$\begin{cases} \left(EI\theta' + EI_3 U_1' + EI_4 U_2' - M_z\right)\delta\theta \big|_0^l = 0 \\ \left(EI_3\theta' + EI_1 U_1' + EI_5 U_2' - M_1\right)\delta U_1 \big|_0^l = 0 \\ \left(EI_4\theta' + EI_5 U_1' + EI_2 U_2' - M_2\right)\delta U_2 \big|_0^l = 0 \\ \left[kGA(\theta - w') + Q\right]\delta w \big|_0^l = 0 \end{cases} \tag{12}$$

2 弹性控制微分方程的求解

对方程(11)中的第一个式子进行化简和2次求导,可得$U_1^{(2)}(z)$和$U_1^{(4)}(z)$表达式分别为:

$$\begin{cases} U_1^{(2)}(z) = -\frac{I}{I_3}\theta'' - \frac{I_4}{I_3} U_2'' + \frac{kGA(\theta - w')}{EI_3} \\ U_1^{(4)}(z) = -\frac{I}{I_3}\theta^{(4)} - \frac{I_4}{I_3} U_2^{(4)} \end{cases} \tag{13}$$

对方程(11)中的第二、三个式子进行二次求导,可得:

$$\begin{cases} EI_3\theta^{(4)} + EI_1 U_1^{(4)} + EI_5 U_2^{(4)} - GI_{G1} U_1'' = 0 \\ EI_4\theta^{(4)} + EI_5 U_1^{(4)} + EI_3 U_2^{(4)} - GI_{G2} U_2'' = 0 \end{cases} \tag{14}$$

将式(13)代入式(14),可得关于$\theta(z)$、$U_2(z)$的微分方程为

$$A'\theta^{(4)} + B\theta'' + CU_2^{(4)} + DU_2'' + E'kGA(\theta - w') = 0 \tag{15}$$

其中,

$$A' = E(I_3^2 - II_1),$$
$$B = GI_{G1} I,$$
$$C = E(I_3 I_5 - I_1 I_4),$$
$$D = GI_{G1} I_4,$$
$$E' = -GI_{G1}/E$$

由微分方程(11)中的前三个式子可得:

$$F\theta^{(4)} + G' U_2^{(4)} + HU_2'' = 0 \tag{16}$$

其中,

$$F = E(I_3 I_4 - II_5),$$
$$G' = E(I_2 I_3 - I_4 I_5),$$
$$H = -GI_{G2} I_3$$

对方程(11)中的第4个式子及式(15)、(16)进行整理代换,可得:

$$w^{(8)} + \left(\frac{BG'}{A'G' - CF} + \frac{H}{G'} - \frac{(DG' - CH)F}{(A'G' - CF)G'}\right) w^{(6)} + \frac{BH}{A'G' - CF} w^{(4)} + \frac{E'H}{A'G' - CF} q_y = 0 \tag{17}$$

方程(17)的特征解可表示为:

$$r_{1,2} = \pm\eta_1,\ r_{3,4} = \pm\eta_2$$

则竖向挠度$w(z)$的解为:

$$w(z) = c_1 \mathrm{ch}(\eta_1 z) + c_2 \mathrm{sh}(\eta_1 z) + c_3 \mathrm{ch}(\eta_2 z) + c_4 \mathrm{sh}(\eta_2 z) + c_5 z^3 + c_6 z^2 + c_7 z + c_8 + \frac{q_y}{24EI} z^4 \tag{18}$$

式中:c_1~c_8为方程的常系数;z为计算跨径的纵向坐标。

根据方程(11)中的第4个式子竖向转角θ与竖向挠度w的关系,由方程(18),假设$\theta(z)$解的表达式为

$$\theta(z) = B_1 \mathrm{sh}(\eta_1 z) + B_2 \mathrm{ch}(\eta_1 z) + B_3 \mathrm{sh}(\eta_2 z) + B_4 \mathrm{ch}(\eta_2 z) + B_5 z^3 + B_6 z^2 + B_7 z + B_8$$

由恒等式原理,可求得$\theta(z)$的常系数,从而得到竖向转角$\theta(z)$的解为:

$$\theta(z) = c_1\eta_1 \mathrm{sh}(\eta_1 z) + c_2\eta_1 \mathrm{ch}(\eta_1 z) + c_3\eta_2 \mathrm{sh}(\eta_2 z) + c_4\eta_2 \mathrm{ch}(\eta_2 z) + \frac{q_y}{6EI} z^3 + 3c_5 z^2 + \left(2c_6 + \frac{q_y}{kGA}\right) z + \frac{6EI}{kGA} c_5 + c_7 \tag{19}$$

同样,根据方程(11)中的第二、三个式子及式(19),由恒等式原理可得:

$$U_1(z) = c_1 D_1 \mathrm{sh}(\eta_1 z) + c_2 D_1 \mathrm{ch}(\eta_1 z) + c_3 D_3 \mathrm{sh}(\eta_2 z) + c_4 D_3 \mathrm{ch}(\eta_2 z) + \frac{6EI_3}{GI_{G1}} c_5 + \frac{I_3 q_y}{GI_{G1} I} z \tag{20}$$

$$U_2(z) = c_1 F_1 \mathrm{sh}(\eta_1 z) + c_2 F_1 \mathrm{ch}(\eta_1 z) + c_3 F_3 \mathrm{sh}(\eta_2 z) + c_4 F_3 \mathrm{ch}(\eta_2 z) + \frac{6EI_4}{GI_{G2}} c_5 + \frac{I_4 q_y}{GI_{G2} I} z \tag{21}$$

其中，

$$D_1 = \frac{N_1}{M_1},\ D_3 = \frac{N_2}{M_2};$$

$$F_1 = L_1/M_1,\ F_3 = L_2/M_2;$$

$$M_i = \left(GI_{G1} - EI_1\eta_i^2\right)\left(GI_{G2} - EI_2\eta_i^2\right) - E^2I_5^2\eta_i^4;$$

$$N_i = EI_3\eta_i^3\left(GI_{G2} - EI_2\eta_i^2\right) + E^2I_4I_5\eta_i^5;$$

$$L_i = EI_4\eta_i^3\left(GI_{G1} - EI_1\eta_i^2\right) + E^2I_3I_5\eta_i^5,$$

$i = 1,2$。

3　几种常用简支箱梁的自然边界条件

3.1　简支箱梁均布力边界条件

简支箱梁均布力边界条件为：

$$\begin{cases} w(0) = 0, w(L) = 0; \\ \theta'(0) = 0, \theta'(L) = 0; \\ u_1'(0) = 0, u_1'(L) = 0; \\ u_2'(0) = 0, u_2'(L) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

3.2　简支箱梁集中力边界条件

跨中为集中力P的简支梁，结构如图2所示。为描述集中力两侧梁段的力学性能，引入两个坐标系，坐标系原点分别为O_1和O_2。图2中，集中力P距O_1为L_1、距O_2为L_2，该简支梁边界条件为：

$$\begin{cases} w_1(0) = 0,\ w_2(L_2) = 0,\ w_1(L_1) = w_2(0), \\ w_1'(L_1) = w_2'(0); \\ \theta_1'(0) = 0,\ \theta_2'(L_2) = 0,\ \theta_1'(L_1) = \theta_2'(0); \\ u_{11}'(0) = 0,\ u_{12}'(L_2) = 0; \\ u_{11}(L_1) = u_{12}(0),\ \theta_1(L_1) - \theta_2(0) = \dfrac{-P}{kGA}; \\ u_{21}'(0) = 0,\ u_{22}'(L_2) = 0; \\ u_{21}(L_1) = u_{22}(0); \\ u_{21}'(L_1) = u_{22}'(0),\ u_{11}'(L_1) = u_{12}'(0) \end{cases} \tag{23}$$

式中：$w(x)$和$\theta(x)$的下标代表其所在的坐标系；$u(x)$下标的第一个数字为其类型，第二个数字代表其坐标系。

4　算例及分析

以图1的单箱三室箱形梁为例，该箱形梁的材料参数和几何参数分别为：E = 35 GPa，$t_1 = t_2$ = 0.25 m，t_w = 0.30 m，b_1 = 2.00 m，b_2 = 2.55 m，h = 2.50 m。假定该箱形梁顶板、底板和腹板连接均采用共用节点法，简支边界条件为：箱梁一端节点在x、y、z方向施加约束，另一端节点则在x、y方向施加约束。

该箱形梁在均布荷载$q(x)$ = 300 kN/m和集中力P = 300 kN两种工况下，桥梁跨径分别为20、40、60、80 m时，运用本文推导公式(18)、欧拉梁理论、Timoshenko梁理论及有限元法分别计算两种工况下不同边界条件的挠度，结果如图3~4所示，跨度为20 m时两种工况下不同边界条件的挠度值如表1~2所示。图5为该箱形梁应用ANSYS软件建立的有限元模型。

由表1、表2和图3、图4可知：

1）单箱三室箱形梁竖向挠度是由欧拉梁理论、Timoshenko剪切变形、剪力滞效应和自平衡条件的影响值叠加而成；

2）本文推导理论值与有限元法计算值较为接近，其误差皆在5%以内，但本文理论计算精度最高。

3）单箱三室箱形梁桥计算跨径分别为20、40、60、80 m时，对于均布荷载，Timoshenko剪切变形对竖向挠度(跨中挠度)的影响率随跨径增加而呈递减趋势，其影响率分别为27.60%、6.00%、3.00%、1.70%；同时剪滞效应对竖向挠度(跨中挠度)的影响率亦随跨径增大而减小，且影响率为8.50%、2.70%、1.20%、0.70%。

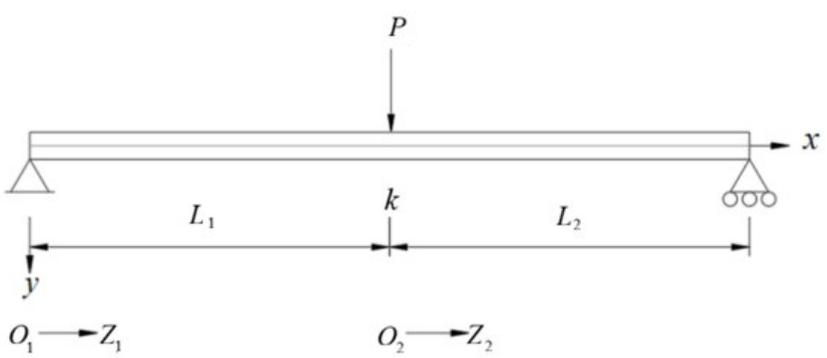
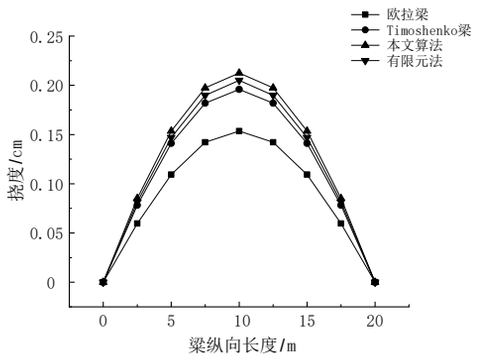
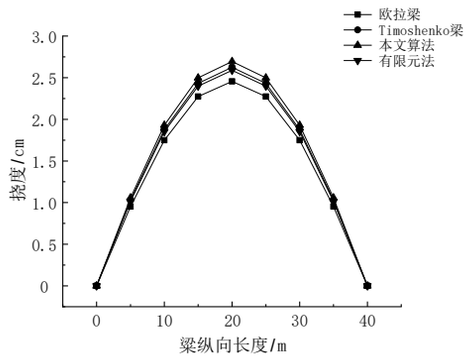


图2　简支箱梁坐标与荷载系统

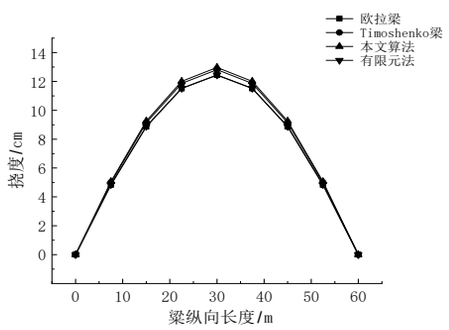
Fig. 2　Coordinate and load system of simply supported box girder



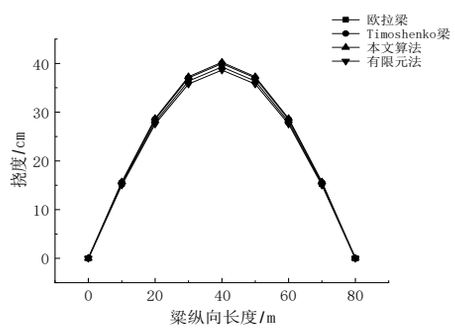
a L=20 m



b L=40 m



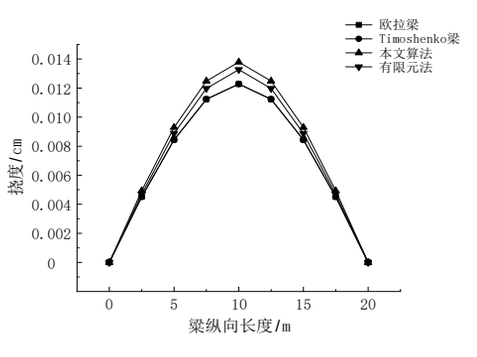
c L=60 m



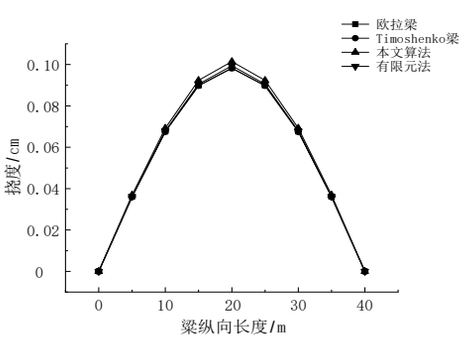
d L=80 m

图3　均布荷载简支箱梁挠度

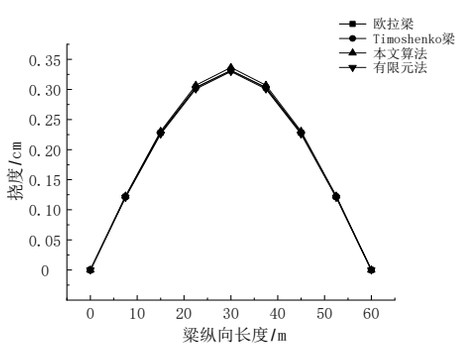
Fig. 3　Deflection of simply supported box girder under uniform load



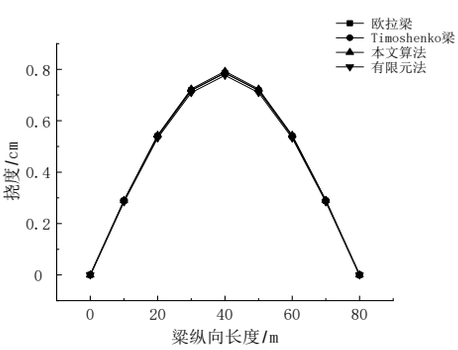
a L=20 m



b L=40 m



c L=60 m



d L=80 m

图4　集中荷载简支箱梁挠度

Fig. 4　Deflection of simply supported box girder under concentrated load

表 1　均布荷载下跨径 L=20 m 时简支箱梁的竖向挠度

Table 1　Vertical deflection of simply supported box girder with a span of L=20 m under uniformly distributed loads

箱梁纵向长度/m	欧拉梁理论/mm	Timoshenko 梁理论/mm	Timoshenko 剪切变形影响率/%	本文理论解/mm	有限元法/mm	剪力滞效应影响率/%
0	0	0	0	0	0	0
2. 5	0. 596	0. 781	31. 04	0. 852	0. 814	9. 09
5. 0	1. 094	1. 411	28. 98	1. 535	1. 470	8. 79
7. 5	1. 421	1. 818	27. 94	1. 973	1. 898	8. 53
10. 0	1. 535	1. 958	27. 56	2. 125	2. 050	8. 53
12. 5	1. 421	1. 818	27. 94	1. 973	1. 898	8. 53
15. 0	1. 094	1. 411	28. 94	1. 535	1. 470	8. 79
17. 5	0. 596	0. 781	31. 04	0. 852	0. 814	9. 09
20. 0	0	0	0	0	0	0

表 2　集中荷载下跨径 L=20 m 时简支箱梁的竖向挠度

Table 2　Vertical deflection of simply supported box girder with a span of L=20 m under concentrated load

箱梁纵向长度/m	欧拉梁理论/mm	Timoshenko 梁理论/mm	Timoshenko 剪切变形影响率/%	本文理论解/mm	有限元法/mm	剪力滞效应影响率/%
0	0	0	0	0	0	0
2. 5	0. 045	0. 045	0	0. 049	0. 047	8. 89
5. 0	0. 084	0. 084	0	0. 093	0. 089	10. 71
7. 5	0. 112	0. 112	0	0. 125	0. 120	11. 61
10. 0	0. 123	0. 123	0	0. 138	0. 133	12. 20
12. 5	0. 112	0. 112	0	0. 125	0. 120	11. 61
15. 0	0. 084	0. 084	0	0. 093	0. 089	10. 71
17. 5	0. 045	0. 045	0	0. 049	0. 047	8. 89
20. 0	0	0	0	0	0	0

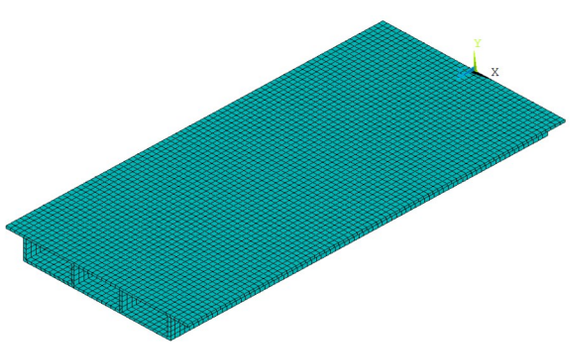


图 5　有限元模型

Fig. 5　Finite element model

4）集中荷载作用下，Timoshenko 剪切变形对箱梁竖向挠度（跨中挠度）无影响，但剪滞效应对跨中挠度的影响率增大，且随跨径增大亦呈递减趋势。箱梁桥计算跨径为 20、40、60、80 m 时，剪滞效应的影响率分别为 12. 20%、3. 00%、1. 50%、0. 80%。

5　结论

1）本文综合考虑单箱三室箱梁桥的各项影响因素，基于能量变分法对箱形梁桥竖向挠度开展研究。与欧拉梁理论和 Timoshenko 梁理论相比较，箱形梁桥竖向挠度计算精度有较大提高。基于此，本文理论可为箱形梁桥优化设计、施工监控和耐久性研究提供可靠的理论基础。

2）本文竖向挠度理论值与有限元数值解较为接近，这说明本文方法的有效性。因而，本文方法具有重要的理论意义和实用价值，特别是本文方法对于宽度较大的多箱室梁桥挠度计算具指导作用。

参考文献：

[1] 吕志涛，潘钻峰. 大跨径预应力混凝土箱梁桥设计中的几个问题[J]. 土木工程学报，2010，43(1)：70-76.
[2] ZHU Z，LI Y，MA C. Damage analysis of small box girder bridges under car explosion[J]. Engineering Failure Analysis，2021，120：105104.
[3] 傅安民，王雨权，廖立坚. 箱形截面混凝土梁有效宽度通用计算算法研究[J]. 铁道工程学报，2024，41(10)：31-38.
[4] 王瑞正，张元海，魏彦红. 考虑扭翘二次剪力流影响的薄壁箱梁畸变效应分析[J]. 铁道学报，2025，47(5)：161-169.
[5] ABID S R，TAYŞI N，ÖZAKÇA M，et al. Finite element thermo-mechanical analysis of concrete box-girders[J]. Structures，2021，33：2424-2444.
[6] 周啟浩，卢朝辉，李海. 锈蚀高铁简支箱梁抗弯性能试验研究[J]. 建筑结构，2021，51(S1)：1514-1521.
[7] 文亚男. 高强预应力混凝土简支箱梁受力特性研究[D]. 成都：西南交通大学，2017.
[8] 陈水生，田正龙，桂水荣. 单箱多室波形钢腹板箱梁剪力滞研究[J]. 公路交通科技，2015，32(7)：69-75.
[9] 雒敏，蔺鹏臻，孙理想. 单箱双室箱梁的剪力滞效应分析[J]. 力学与实践，2013，35(6)：70-74.
[10] 周世军. 箱梁的剪力滞效应分析[J]. 工程力学，2008，25(2)：204-208.
[11] 张玉元，张元海，张慧，等. 箱形梁剪力滞和剪切效应引起的附加挠度分析[J]. 计算力学学报，2018，35(5)：619-626.
[12] 张已存. 考虑全截面剪切变形的箱梁挠度简化计算方法[J]. 力学与实践，2023，45(5)：1137-1143.
[13] 李学斌，马林，吴国琦，等. 铁路简支箱梁梁端裂缝对受力性能影响研究[J]. 铁道工程学报，2022，39(11)：43-49.
[14] 张云飞，陈建兵，周晨. 考虑剪力滞效应及剪切变形的蝶形腹板箱梁挠度分析[J]. 苏州科技大学学报(工程技术版)，2022，35(3)：20-27.

Study on the Vertical Deflection of a Single-box Three-cell Box Girder Bridge Under Self-equilibrium Conditions

LIU Haoran，GAN Yanan，TANG Jieru，ZHANG Wenzheng
(School of Civil Engineering，Yancheng Institute of Technology，Yancheng Jiangsu 224051，China)

Abstract：By considering factors including the Timoshenko shear deformation, the shear lag effect, and the self- equilibrium condition of shear lag warping stress, the total potential energy of the structure was obtained. The governing differential equation of the single-box three-cell box girder is derived via the energy variation method, and then the solution of this control differential equation is achieved. Finally, through numerical simulation, the results show that: The vertical displacement of the box girder can be expressed as the superposition of displacements attributable to the Euler beam theory, Timoshenko shear deformation, shear lag effect and the self-equilibrium condition of shear lag warping stress; Under uniform load, the smaller the span of the box girder, the greater the influence of shear deformation and shear lag effect on the vertical deflection of the box girder; Under concentrated load, Timoshenko shear deformation has no effect on the vertical deflection, but the influence of shear lag effect increases significantly; The calculation accuracy of theoretical values derived in this paper is the highest，showing excellent agreement with those obtained by the finite element method, and all errors are within 5%.

Keywords：energy variational method；self-equilibrium condition；shear lag；single-box three-cell box girder；vertical deflection

(责任编辑：李华云)