doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023478

平凡环扩张上的强 Ding 投射模

李润华，张翠萍
（西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070）

摘要：设 $R \ltimes M$ 是平凡环扩张，其中 R 是环，M 是 (R,R)-双模. 在特定条件下，证明 (X,α) 是强 Ding 投射左 $R \ltimes M$-模当且仅当序列 $M\otimes_R M\otimes_R X \xrightarrow{M\otimes\alpha} M\otimes_R X \xrightarrow{\alpha} X$ 正合，并且 $\operatorname{coker}(\alpha)$ 是强 Ding 投射左 R-模.

关键词：平凡扩张；Ding 投射模；强 Ding 投射模
中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)04-0781-06

Strongly Ding Projective Modules over Trivial Ring Extensions

LI Runhua, ZHANG Cuiping
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Let $R \ltimes M$ be a trivial ring extension, where R be a ring, M be an (R,R)-bimodule. We prove that (X,α) is a strongly Ding projective left $R \ltimes M$-module if and only if the sequence $M\otimes_R M\otimes_R X \xrightarrow{M\otimes\alpha} M\otimes_R X \xrightarrow{\alpha} X$ is exact and $\operatorname{coker}(\alpha)$ is a strongly Ding projective left R-module under certain conditions.

Keywords: trivial extension; Ding projective module; strongly Ding projective module

0 引 言

目前，关于 Gorenstein 投射模的研究已有很多结果：Enochs 等[1]引入了 Gorenstein 投射(内射，平坦)模的概念，并研究了其性质；Ding 等[2]研究了 Gorenstein 投射模的特殊情形，即强 Gorenstein 平坦模，证明了左 R-模 M 是强 Gorenstein 平坦模当且仅当 M 有右正合的平坦分解，并且对任意平坦左 R-模 F，$\operatorname{Ext}^i_R(M,F)=0$；Gillespie[3]将强 Gorenstein 平坦模称为 Ding 投射模，并利用这些模在模范畴中构造了新的模类；Huang 等[4]引入了强 Ding 投射(内射)模，证明了任意 Ding 投(内)射模都是强 Ding 投(内)模的直和项；Fossum 等[5]给出了平凡环扩张上模范畴的等价刻画；Holm 等[6]研究了平凡环扩张上的 Gorenstein 投射(内射，平坦)模；Mao 研究了平凡环扩张上模的同调性质[7]，并进一步研究了平凡环扩张上的 Ding 投射模和 Ding 内射模，证明了在特定条件下，(X,α) 是 Ding 投射左 $R \ltimes M$-模当且仅当序列 $M\otimes_R M\otimes_R X \xrightarrow{M\otimes\alpha} M\otimes_R X \xrightarrow{\alpha} X$ 正合，并且 $\operatorname{coker}(\alpha)$ 是 Ding 投射左R-模[8]. 受上述研究工作的启发，本文研究平凡环扩张上的强 Ding 投射模. 本文中环均指有单位元的非零结合环，模指酉模. 对于环 R，R-Mod 表示左 R-模范畴，${}_RX$ 表示左 R-模，$\operatorname{fd}(X)$ 表示 R-模 X 的平坦维数.

收稿日期：2023-11-07. **网络首发日期**：2024-06-21.

第一作者简介：李润华(1998—)，女，汉族，硕士研究生，从事环的同调理论的研究，E-mail：1304766409@qq.com. **通信作者简介**：张翠萍(1974—)，女，汉族，博士，副教授，从事环的同调理论的研究，E-mail：zhangcp@nwnu.edu.cn.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：12361007).
网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240620.1442.001.

设 R 是环，M 是(R,R)-双模. 在笛卡尔积 $R\times M$ 上定义乘法为

$$(r_1,m_1)(r_2,m_2)=(r_1r_2,r_1m_2+m_1r_2).$$

其中 $r_1,r_2\in R$，$m_1,m_2\in M$，则 $R\times M$ 按普通坐标的加法和上述定义的乘法构成一个环. 文献[5]将该环称为 R 关于 M 的平凡扩张，记为 $R\ltimes M$.

$R\ltimes M$-Mod 的对象为(X,α)，其中 X 是左 R-模，$\alpha: M\otimes_R X\to X$，并满足 $\alpha(M\otimes\alpha)=0$. 设$(X,\alpha),(Y,\beta)$是左 $R\ltimes M$-模，则(X,α)到(Y,β)的态射为 f，其中 $f: X\to Y$ 是左R-模同态，并且满足如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} M\otimes_R X & \xrightarrow{M\otimes f} & M\otimes_R Y \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

左 $R\ltimes M$-模序列 $0\to(X,\alpha)\to(Y,\beta)\to(Z,\delta)\to 0$ 正合当且仅当左 R-模序列 $0\to X\to Y\to Z\to 0$ 正合[5].

R-Mod 和 $R\ltimes M$-Mod 之间存在以下函子：

1) $\mathbf{T}$: R-Mod$\to R\ltimes M$-Mod，$\mathbf{T}(X)=(X\oplus(M\otimes_R X),\mu)$，其中 $X\in R$-Mod，$\mu=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$: $(M\otimes_R X)\oplus(M\otimes_R M\otimes_R X)\to X\oplus(M\otimes_R X)$；$\mathbf{T}(f)=\begin{pmatrix}f & 0\\ 0 & M\otimes f\end{pmatrix}$，其中$f: X\to Y$ 是左R-模同态；

2) $\mathbf{U}$: $R\ltimes M$-Mod$\to R$-Mod，$\mathbf{U}(X,\alpha)=X$，$\mathbf{U}(f)=f$，其中$(X,\alpha)\in R\ltimes M$-Mod，f: $(X,\alpha)\to(Y,\beta)$是左 $R\ltimes M$-模同态；

3) $\mathbf{Z}$: R-Mod$\to R\ltimes M$-Mod，$\mathbf{Z}(X)=(X,0)$，$\mathbf{Z}(f)=f$，其中 $X\in R$-Mod，$f: X\to Y$ 是左R-模同态；

4) $\mathbf{C}$: $R\ltimes M$-Mod$\to R$-Mod，$\mathbf{C}(X,\alpha)=\mathrm{coker}(\alpha)$，$\mathbf{C}(f)$为诱导同态，其中$(X,\alpha)\in R\ltimes M$-Mod，$f$: $(X,\alpha)\to(Y,\beta)$是左 $R\ltimes M$-模同态.

由文献[5]知，$(\mathbf{T},\mathbf{U})$，$(\mathbf{C},\mathbf{Z})$是伴随对，$\mathbf{CT}=\mathrm{id}_{R\text{-Mod}}$，$\mathbf{UZ}=\mathrm{id}_{R\text{-Mod}}$.

1 预备知识及主要结果

定义 1[4] 若存在投射左 R-模的正合列

$$\mathbf{P}: \cdots\to P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\to\cdots, \tag{1}$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}\, f$，并且对任意平坦模 F，序列 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P},F)$正合，则称左 R-模 M 是强 Ding 投射模.

引理 1[7] 设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模，则：

1) (X,α)是投射左 $R\ltimes M$-模当且仅当$(X,\alpha)\cong\mathbf{T}(P)$，其中 P 是投射左R-模；

2) (X,α)是平坦左 $R\ltimes M$-模当且仅当$(X,\alpha)\cong\mathbf{T}(N)$，其中 N 是平坦左R-模.

引理 2[9] 设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模，$\rho: X\to\mathrm{coker}(\alpha)$是满同态，则：

1) $\mathbf{Z}(W)\otimes_{R\ltimes M}\mathbf{T}(P)\cong W\otimes_R P$；

2) $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{T}(P),\mathbf{Z}(N))\cong\mathrm{Hom}_R(P,N)$；

3) 存在短正合列 $0\to\mathbf{Z}(\mathrm{Im}(\alpha))\to(X,\alpha)\to\mathbf{Z}(\mathrm{coker}(\alpha))\to 0$；

4) 存在 $\delta: M\otimes_R\mathrm{coker}(\alpha)\to X$，使得 $\delta(M\otimes\rho)=\alpha$.

引理 3[10] 设 R 是环，U 是有有限平坦维数的右 R-模，$\mathbf{F}: \cdots\to F^{n-1}\to F^n\to F^{n+1}\to\cdots$是平坦左 R-模正合列，则 $U\otimes_R\mathbf{F}$ 正合.

下面讨论平凡环扩张 $R\ltimes M$ 上模的强 Ding 投射性质.

引理 4[11] 设 X 是左R-模，则以下条件等价：

1) X 是强 Ding 投射左 R-模；

2) 存在投射左 R-模正合列(1)，使得对任意平坦维数有限的左 R-模 G，$\mathrm{Hom}_R(-,G)$作用上述

序列后仍正合.

定理 1　设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模. 如果 $\mathrm{fd}(M_R)<\infty$，$\mathrm{fd}({}_RM)<\infty$，序列 $M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha} M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha} X$ 正合，并且 $\mathrm{coker}(\alpha)$是强 Ding 投射左 R-模，则(X,α)是强 Ding 投射左 $R\ltimes M$-模.

证明：因为 $\mathrm{coker}(\alpha)$是强 Ding 投射左 R-模，所以存在投射左 R-模正合列(1)，使得 $\mathrm{coker}(\alpha)\cong\mathrm{Ker}(f)$，对任意平坦左 R-模 F，$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P},F)$正合. 因为 $\mathrm{fd}(M_R)<\infty$，因此由引理 3 可知，

$$M\otimes_R\mathbf{P}\cdots\to M\otimes_R P\xrightarrow{M\otimes f}M\otimes_R P\xrightarrow{M\otimes f}M\otimes_R P\to\cdots$$

正合，并有 $M\otimes_R\mathrm{coker}(\alpha)\cong\mathrm{Ker}(M\otimes f)$.

令 ρ：$X\to\mathrm{coker}(\alpha)$是满同态，则有正合列

$$M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{coker}(\alpha)\to 0,$$

进而有正合列

$$M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\rho}M\otimes_R\mathrm{coker}(\alpha)\to 0.$$

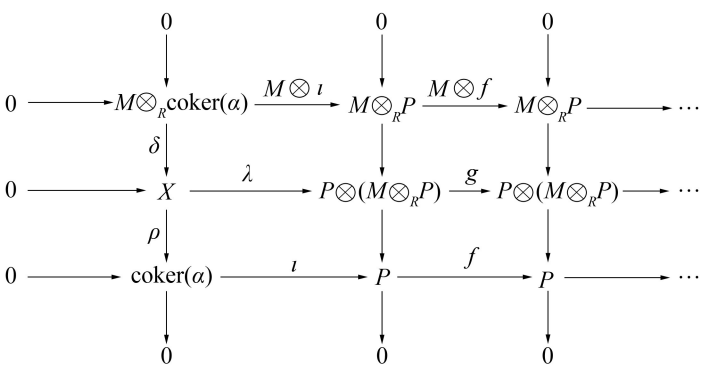
因为

$$M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{coker}(\alpha)\to 0$$

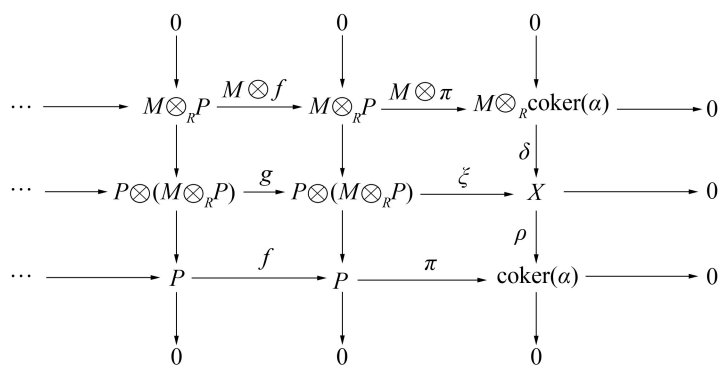
是正合的，因此由引理 2 易得以下正合列：

$$0\to M\otimes_R\mathrm{coker}(\alpha)\xrightarrow{\delta}X\xrightarrow{\rho}\mathrm{coker}(\alpha)\to 0,$$

并且 $\delta(M\otimes\rho)=\alpha$. 因为 $\mathrm{fd}({}_RM)<\infty$，故由文献[11]中引理 3.2 可知 $\mathrm{fd}(M\otimes_R P)<\infty$，再由引理 4 知 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P},M\otimes_R P)$ 正合，从而有 $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Ker}(f),M\otimes_R P)=0$. 设 ι：$\mathrm{coker}(\alpha)\to P$ 是单同态，π：$P\to\mathrm{coker}(\alpha)$是满同态，满足 $\iota\pi=f$，则有单同态 $M\otimes\iota$：$M\otimes_R\mathrm{coker}(\alpha)\to M\otimes_R P$，从而存在 ψ：$X\to M\otimes_R P$，使得 $\psi\delta=M\otimes\iota$，存在 η：$P\to X$，使得 $\rho\eta=\pi$. 定义 $\lambda=\begin{pmatrix}\iota\rho\\ \psi\end{pmatrix}$：$X\to P\oplus(M\otimes_R P)$，$\xi=(\eta,\delta(M\otimes\pi))$：$P\oplus(M\otimes_R P)\to X$，则有如下行列正合的交换图：



和



所以有正合列

$$\cdots\to P\oplus(M\otimes_R P)\xrightarrow{g}P\oplus(M\otimes_R P)\xrightarrow{g}P\oplus(M\otimes_R P)\to\cdots,$$

其中 $g=\lambda\xi$, $X\cong\mathrm{Ker}(g)$. 因为下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & M\otimes_R X & \xrightarrow{M\otimes\lambda} & M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) & \xrightarrow{M\otimes g} & M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\lambda} & P\oplus(M\otimes_R P) & \xrightarrow{g} & P\oplus(M\otimes_R P) & \longrightarrow & \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) & \xrightarrow{M\otimes g} & M\otimes_R(P\oplus(M\otimes_R P)) & \xrightarrow{M\otimes\xi} & M\otimes_R X & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\
\cdots & \longrightarrow & P\oplus(M\otimes_R P) & \xrightarrow{g} & P\oplus(M\otimes_R P) & \xrightarrow{\xi} & X & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

故可得左 $R\ltimes M$-模正合列

$$0\to(X,\alpha)\to(P\oplus(M\otimes_R P),\mu)\to(P\oplus(M\otimes_R P),\mu)\to\cdots$$

和

$$\cdots\to(P\oplus(M\otimes_R P),\mu)\to(P\oplus(M\otimes_R P),\mu)\to(X,\alpha)\to 0,$$

即有左 $R\ltimes M$-模正合序列

$$\mathbf{P}^*:\cdots\to\mathbf{T}(P)\xrightarrow{g}\mathbf{T}(P)\xrightarrow{g}\mathbf{T}(P)\xrightarrow{g}\mathbf{T}(P)\to\cdots. \tag{2}$$

由引理 1 可知 $\mathbf{T}(P)$为投射模, 并有$(X,\alpha)\cong\mathrm{Ker}(g)$.

下证 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{P}^*,(Y,\beta))$正合, 其中$(Y,\beta)$是任意平坦左 $R\ltimes M$-模. 设(Y,β)是平坦左 $R\ltimes M$-模, 由引理 1 知, 存在平坦左 R-模 N, 使得$(Y,\beta)\cong\mathbf{T}(N)$. 由引理 2 知, 存在左 $R\ltimes M$-模正合列 $0\to\mathbf{Z}(M\otimes_R N)\to\mathbf{T}(N)\to\mathbf{Z}(N)\to 0$, 因此有复形的正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{P}^*,\mathbf{Z}(M\otimes_R N))\to\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{P}^*,\mathbf{T}(N))\to\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{P}^*,\mathbf{Z}(N))\to 0.$$

因为 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{T}(P),\mathbf{Z}(N))\cong\mathrm{Hom}_R(P,N)$, 故 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{P}^*,\mathbf{Z}(N))\cong\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P},N)$正合. 因为 $\mathrm{fd}({}_RM)<\infty$, 由文献[11]中引理 3.2 可知, $\mathrm{fd}(M\otimes_R N)<\infty$, 故由引理 4 知 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P},M\otimes_R N)$正合. 又因为 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{T}(P),\mathbf{Z}(M\otimes_R N))\cong\mathrm{Hom}_R(P,M\otimes_R N)$, 故 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}^*,\mathbf{Z}(M\otimes_R N))\cong\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P},M\otimes_R N)$正合. 由文献[12]中定理 1.4.7 知, $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{P}^*,\mathbf{T}(N))$正合, 即 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{P}^*,(Y,\beta))$正合. 从而$(X,\alpha)$是强 Ding 投射左 $R\ltimes M$-模. 证毕.

定理 2 设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模, $\mathrm{fd}(\mathbf{Z}(R)_{R\ltimes M})<\infty$, $\mathrm{fd}({}_{R\ltimes M}\mathbf{Z}(R))<\infty$. 如果$(X,\alpha)$是强 Ding 投射左 $R\ltimes M$-模, 则序列 $M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X$ 正合, 并且 $\mathrm{coker}(\alpha)$是强 Ding 投射左 R-模.

证明: 因为(X,α)是强 Ding 投射左 $R\ltimes M$-模, 故由其定义知, 存在投射左 $R\ltimes M$-模正合列(2), 使得$(X,\alpha)\cong\mathrm{Ker}(g)$, 并对任意平坦左 $R\ltimes M$-模(Y,β), 有 $\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{P}^*,(Y,\beta))$正合.

因为 $\mathrm{fd}(\mathbf{Z}(R)_{R\ltimes M})<\infty$, 由引理 3 知 $\mathbf{Z}(R)\otimes_{R\ltimes M}\mathbf{P}^*$ 正合, 而 $\mathbf{Z}(R)\otimes_{R\ltimes M}\mathbf{T}(P)\cong R\otimes_R P\cong P$, 故可得投射左 R-模正合列 $\mathbf{C}(\mathbf{P}^*)$: $\cdots\to P\to P\xrightarrow{\mathbf{C}(g)}P\to P\to\cdots$, 并有 $\mathrm{coker}(\alpha)\cong\mathrm{Ker}(\mathbf{C}(g))$.

设 F 是平坦左 R-模, 则由文献[12]注记 2.1.9 可知 $F=\varinjlim N_i$, 其中 N_i 是自由模. $\mathbf{Z}(F)=\mathbf{Z}(\varinjlim N_i)=\varinjlim\mathbf{Z}(N_i)$. 因为 $\mathrm{fd}({}_{R\ltimes M}\mathbf{Z}(R))<\infty$, 故 $\mathrm{fd}({}_{R\ltimes M}\mathbf{Z}(F))<\infty$, 因此有 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}(\mathbf{P}^*),F)\cong\mathrm{Hom}_{R\ltimes M}(\mathbf{P}^*,\mathbf{Z}(F))$正合. 从而 $\mathrm{coker}(\alpha)$是强 Ding 投射左 R-模.

因为(X,α)是强 Ding 投射左 $R\ltimes M$-模, 所以(X,α)是 Ding 投射左 $R\ltimes M$-模, 由文献[8]中定理 2.1 可知, 序列 $M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X$ 正合. 证毕.

推论 1 设(X,α)是左 $R\ltimes M$-模, $\mathrm{fd}(M_R)<\infty$, $\mathrm{fd}({}_R M)<\infty$, $\mathrm{fd}(\mathbf{Z}(R)_{R\ltimes M})<\infty$, $\mathrm{fd}({}_{R\ltimes M}\mathbf{Z}(R))<\infty$, 则:

1) (X,α)是强 Ding 投射左 $R\ltimes M$-模, 当且仅当序列 $M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes\alpha}M\otimes_R X\xrightarrow{\alpha}X$ 正合, 并且 $\mathrm{coker}(\alpha)$是强 Ding 投射左 R-模;

2) $\mathbf{T}(X)$是强 Ding 投射左 $R\ltimes M$-模, 当且仅当 X 是强 Ding 投射左 R-模;

3) $\mathbf{Z}(X)$是强 Ding 投射左 $R\ltimes M$-模, 当且仅当 $M\otimes_R X=0$, 并且 X 是强 Ding 投射左 R-模.

证明：1）由定理 1 和定理 2 可得.

2）因为序列 $M\otimes_R M\otimes_R(X\oplus(M\otimes_R P))\xrightarrow{M\otimes u}M\otimes_R(X\oplus(M\otimes_R X))\xrightarrow{u}P\oplus(M\otimes_R X)$ 正合，$\operatorname{coker}(u)=X$，故结论成立.

3）因为序列 $M\otimes_R M\otimes_R X\xrightarrow{M\otimes 0}M\otimes_R X\xrightarrow{0}X$ 正合当且仅当 $M\otimes_R X=0$，$\operatorname{coker}(0)=X$，故结论成立. 证毕.

2　应　用

下面将定理 1 和定理 2 的结论应用到一类特殊的平凡环扩张上，即具有零双模同态的 Morita 环. 设 A,B 为两个环，V 是 (A,B)-双模，U 是 (B,A)-双模，$\phi:U\otimes_A V\to B$ 和 $\psi:V\otimes_B U\to A$ 为双模同态，如果 $\Lambda_{(\phi,\psi)}=\begin{pmatrix}A & V\\ U & B\end{pmatrix}_{(\phi,\psi)}$ 中元素的加法为对应位置元素相加，乘法为

$$\begin{pmatrix}a_1 & v_1\\ u_1 & b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & v_2\\ u_2 & b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2+\psi(v_1\otimes u_2) & a_1v_2+v_1b_2\\ u_1a_2+b_1u_2 & b_1b_2+\phi(u_1\otimes v_2)\end{pmatrix},$$

则 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ 称为 Morita 环[13]. 总假设

$$\phi(u_1\otimes v_1)u_2=u_1\psi(v_1\otimes u_2),\qquad v_1\phi(u_1\otimes v_2)=\psi(v_1\otimes u_1)v_2,$$

其中 $u_1,u_2\in U$，$v_1,v_2\in V$，这个条件保证了 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ 是一个结合环. 为方便，记一个 Morita 环为 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$.

Morita 环 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ 上的模结构是已知的[14]. $\Lambda_{(\phi,\psi)}$-Mod 等价于范畴 Ω，其对象为四元组 (X,Y,f,g)，其中 $X\in A$-Mod，$Y\in B$-Mod，$f\in\operatorname{Hom}_B(U\otimes_A X,Y)$，$g\in\operatorname{Hom}_A(V\otimes_B Y,X)$，且满足如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}V\otimes_B U\otimes_A X & \xrightarrow{V\otimes f} & V\otimes_B Y\\ {\scriptstyle\psi\otimes X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g}\\ A\otimes_A X & \xrightarrow{\cong} & X,\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}U\otimes_A V\otimes_B Y & \xrightarrow{U\otimes g} & U\otimes_A X\\ {\scriptstyle\phi\otimes Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f}\\ B\otimes_B Y & \xrightarrow{\cong} & Y.\end{array}$$

设 (X_1,Y_1,f_1,g_1) 和 (X_2,Y_2,f_2,g_2) 是范畴 Ω 中的对象，则 (X_1,Y_1,f_1,g_1) 到 (X_2,Y_2,f_2,g_2) 的态射为 (α,β)，其中 $\alpha\in\operatorname{Hom}_A(X_1,X_2)$，$\beta\in\operatorname{Hom}_B(Y_1,Y_2)$，且满足如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}U\otimes_A X_1 & \xrightarrow{U\otimes\alpha} & U\otimes_A X_2\\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2}\\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2,\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}V\otimes_B Y_1 & \xrightarrow{V\otimes\beta} & V\otimes_B Y_2\\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_2}\\ X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2.\end{array}$$

特别地，如果 $\phi=\psi=0$，则 $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix}A & V\\ U & B\end{pmatrix}_{(0,0)}$ 称为具有零双模同态的 Morita 环.

注意到 $U\oplus V$ 具有 $(A\times B,A\times B)$-双模结构，而左 $A\times B$-模是一个元素对 (X,Y)，其中 $X\in A$-Mod，$Y\in B$-Mod，因此 $(U\oplus V)\otimes_{A\times B}(X,Y)\cong(V\otimes_B Y,U\otimes_A X)$. 由文献[5]知，$\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix}A & V\\ U & B\end{pmatrix}_{(0,0)}$ 在对应运算 $\begin{pmatrix}a & v\\ u & b\end{pmatrix}\to((a,b),(u,v))$ 下同构于平凡环扩张 $(A\times B)\ltimes(U\oplus V)$，因此 $\Lambda_{(0,0)}$-Mod 在函子 $\boldsymbol{\Theta}:\Lambda_{(0,0)}$-Mod $\to(A\times B)\ltimes(U\oplus V)$-Mod 作用下同构于 $(A\times B)\ltimes(U\oplus V)$-Mod，其中 $\boldsymbol{\Theta}(X,Y,f,g)=((X,Y),(g,f))$.

定理 3　设 $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix}A & V\\ U & B\end{pmatrix}_{(0,0)}$ 为 Morita 环，(X,Y,f,g) 是左 $\Lambda_{(0,0)}$-模，则：

1）如果 $\operatorname{fd}(U_A)<\infty$，$\operatorname{fd}({}_BU)<\infty$，$\operatorname{fd}({}_AV)<\infty$，$\operatorname{fd}(V_B)<\infty$，序列 $V\otimes_B U\otimes_A X\xrightarrow{V\otimes f}V\otimes_B Y\xrightarrow{g}X$ 和 $U\otimes_A V\otimes_B Y\xrightarrow{U\otimes g}U\otimes_A X\xrightarrow{f}Y$ 正合，并且 $\operatorname{coker}(f)$ 是强 Ding 投射左 B-模，$\operatorname{coker}(g)$ 是强 Ding 投射左 A-模，则 (X,Y,f,g) 是强 Ding 投射左 $\Lambda_{(0,0)}$-模；

2）如果 $\operatorname{fd}((A,B,0,0)_{\Lambda(0,0)})<\infty$，$\operatorname{fd}({}_{\Lambda(0,0)}(A,B,0,0))<\infty$，且 (X,Y,f,g) 是强 Ding 投射左

$\Lambda_{(0,0)}$-模，则序列 $V\otimes_B U\otimes_A X\xrightarrow{V\otimes f}V\otimes_B Y\xrightarrow{g}X$ 和 $U\otimes_A V\otimes_B Y\xrightarrow{U\otimes g}U\otimes_A X\xrightarrow{f}Y$ 正合，并且 $\operatorname{coker}(f)$是强 Ding 投射左 B-模，$\operatorname{coker}(g)$是强 Ding 投射左 A-模.

证明：1) 由序列 $V\otimes_B U\otimes_A X\xrightarrow{V\otimes f}V\otimes_B Y\xrightarrow{g}X$ 和 $U\otimes_A V\otimes_B Y\xrightarrow{U\otimes g}U\otimes_A X\xrightarrow{f}Y$ 正合可知，序列

$$(U\oplus V)\otimes_{A\times B}(U\oplus V)\otimes_{A\times B}(X,Y)\xrightarrow{(U\oplus V)\otimes(g,f)}(U\oplus V)\otimes_{A\times B}(X,Y)\xrightarrow{(g,f)}(X,Y)\quad(3)$$

正合. 又因为 $\operatorname{coker}(g)$是强 Ding 投射左 A-模，$\operatorname{coker}(f)$是强 Ding 投射左 B-模，所以 $\operatorname{coker}(g,f)=(\operatorname{coker}(g),\operatorname{coker}(f))$是强 Ding 投射左 $A\times B$-模. 再由定理 1 可知，$((X,Y),(g,f))$是强 Ding 投射左 $(A\times B)\ltimes(U\oplus V)$-模，故可得$(X,Y,f,g)$是强 Ding 投射左 $\Lambda_{(0,0)}$-模.

2) 因为 $\operatorname{fd}((A,B,0,0)_{\Lambda(0,0)})<\infty$，$\operatorname{fd}({}_{\Lambda(0,0)}(A,B,0,0))<\infty$，所以 $\operatorname{fd}(\mathbf{Z}(A\times B)_{(A\times B)\ltimes(U\oplus V)})<\infty$，$\operatorname{fd}({}_{(A\times B)\ltimes(U\oplus V)}\mathbf{Z}(A\times B))<\infty$. 由$(X,Y,f,g)$是强 Ding 投射左 $\Lambda_{(0,0)}$-模可知，$((X,Y),(g,f))$是强 Ding 投射左$(A\times B)\ltimes(U\oplus V)$-模. 再由定理 2 可知，序列(3)正合且 $\operatorname{coker}(g,f)=(\operatorname{coker}(g),\operatorname{coker}(f))$是强 Ding 投射左 $A\times B$-模，因此可得序列 $V\otimes_B U\otimes_A X\xrightarrow{V\otimes f}V\otimes_B Y\xrightarrow{g}X$ 和 $U\otimes_A V\otimes_B Y\xrightarrow{U\otimes g}U\otimes_A X\xrightarrow{f}Y$ 正合，并且 $\operatorname{coker}(f)$是强 Ding 投射左 B-模，$\operatorname{coker}(g)$是强 Ding 投射左 A-模. 证毕.

参 考 文 献

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(4): 611-633.

[2] DING N Q, LI Y L, MAO L X. Strongly Gorenstein Flat Modules [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2009, 86(3): 323-338.

[3] GILLESPIE J. Model Structures on Modules over Ding-Chen Rings [J]. Homology, Homotopy and Applications, 2010, 12(1): 61-73.

[4] HUANG C L, WU T S. Ding Projective and Ding Injective Dimensions [J]. International Electronic Journal of Algebra, 2015, 18: 1-20.

[5] FOSSUM R M, GRIFFITH P A, REITEN I. Trivial Extensions of Abelian Categories: Homological Algebra of Trivial Extensions of Abelian Categories with Applications to Ring Theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975: 1-122.

[6] HOLM H, JØRGENSEN P. Semi-dualizing Modules and Related Gorenstein Homological Dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2006, 205(2): 423-445.

[7] MAO L X. Homological Properties of Trivial Ring Extensions [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2023, 22(12): 2350265-1-2350265-23.

[8] MAO L X. Ding Projective and Ding Injective Modules over Trivial Ring Extensions [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2023, 73(3): 903-919.

[9] MAO L X. Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules over Trivial Ring Extensions [J/OL]. Journal of Algebra and Its Applications, (2023-09-23)[2023-11-03]. https://arxiv.org/abs/2305.15656.

[10] ENOCHS E E, CORTÉS-IZURDIAGA M, TORRECILLAS B. Gorenstein Conditions over Triangular Matrix Rings [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2014, 218(8): 1544-1554.

[11] MAO L X. Ding Modules and Dimensions over Formal Triangular Matrix Rings [J]. Rendiconti del Seminario Matematico Della Università di Padova, 2022, 148: 1-22.

[12] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2000: 28.

[13] MORITA K. Duality for Modules and Its Applications to the Theory of Rings with Minimun Condition [J]. Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku: Section A, 1958, 6: 83-142.

[14] GREEN E L. On the Representation Theory of Rings in Matrix Form [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1982, 100(1): 123-138.

(责任编辑：赵立芹)