

一类跳扩散 SEIR 流行病模型渐近行为的分类

林玉国, 郭 丽

(北京大学 数学与统计学院, 吉林 吉林 132013)

摘要: 考虑一类跳扩散 SEIR 流行病模型并确定其疾病发生与否的阈值. 首先, 通过一个简化的极限系统从理论上确定阈值 Ξ ; 其次, 用比较原理证明当 $\Xi < 0$ 时, 疾病将依指数灭绝; 最后, 通过构造合适的 Lyapunov 函数证明当 $\Xi > 0$ 时, 随机系统解的转移概率函数将收敛到唯一的不变测度, 其收敛速度为任意阶多项式收敛.

关键词: 阈值; 遍历性; 灭绝; 不变测度

中图分类号: O211.63 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)03-0551-08

Classification of Asymptotic Behavior of a Class of Jump-Diffusion SEIR Epidemic Models

LIN Yuguo, GUO Li

(School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin 132013, Jilin Province, China)

Abstract: We considered a class of jump-diffusion SEIR epidemic models and determined the threshold for the disease to occur or not. Firstly, the threshold Ξ was theoretically determined through a simplified limiting system. Secondly, by using comparison principle, we proved that when $\Xi < 0$, the disease became exponentially extinct. Finally, by constructing an appropriate Lyapunov function, we proved that when $\Xi > 0$, the transition probability function of the solution of a stochastic system converged to the unique invariant measure, with the convergence speed of arbitrary order polynomial convergence.

Keywords: threshold; ergodicity; extinction; invariant measure

0 引 言

许多传染病在潜伏期都具有传染性, 如 HIV/AIDS^[1-3] 和 COVID-19^[4-6]. Jiao 等^[7] 研究了如下一类潜伏期具传染性的确定性 SEIR(susceptible-exposed-infected-recovered)仓室模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)[I(t) + \theta E(t)] - \mu S(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)[I(t) + \theta E(t)] - (\delta + \mu)E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \delta E(t) - (\gamma + \alpha + \mu)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2025-08-18.

第一作者简介: 林玉国(1980—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事随机微分方程的研究, E-mail: yglino@163.com. **通信作者简介:**

郭 丽(1980—), 女, 汉族, 博士, 教授, 从事代数学及其在传染病模型中应用的研究, E-mail: guomingli95@126.com.

基金项目: 吉林省科技发展计划项目(批准号: YDZJ202201ZYT5648).

其中： $S(t), E(t), I(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示在 t 时刻易感者、暴露者、感染者和康复者的人数； Λ, μ 和 γ 分别表示输入率、自然死亡率和康复率； β 表示从仓室 S 到仓室 E 的传染率； $0 < \theta < 1$ 表示暴露者在潜伏期的传染力； δ 表示从仓室 E 到仓室 I 的传输率； α 表示感染者 I 的因病死亡率. 令

$$R_0 = \frac{\Lambda \beta [\delta + \theta(\gamma + \alpha + \mu)]}{\mu(\gamma + \alpha + \mu)(\delta + \mu)}.$$

根据文献[7]可知：当 $R_0 < 1$ 时，系统(1)的无病平衡点全局渐近稳定；当 $R_0 > 1$ 时，系统(1)的有病平衡点全局渐近稳定. 显然， R_0 是确定性系统(1)疾病发生与否的阈值. 但在以随机 SEIR 传染病模型为研究对象的报道中，类似结论较少^[8-11]. 一般地，很多随机系统并不存在平衡点，所以直接建立严格的阈值条件有一定难度.

基于上述讨论，本文研究系统(1)的随机情形，建立其严格的阈值行为，考虑如下系统：

$$\begin{cases} dS(t) = \{ \Lambda - \beta S(t)[I(t) + \theta E(t)] - \mu S(t) \} dt + \sigma_1 S(t) dB_1(t) + \int_{\mathbf{Y}} C_1(z) S(t^-) \tilde{N}(dt, dz), \\ dE(t) = \{ \beta S(t)[I(t) + \theta E(t)] - (\delta + \mu) E(t) \} dt + \sigma_2 E(t) dB_2(t) + \int_{\mathbf{Y}} C_2(z) E(t^-) \tilde{N}(dt, dz), \\ dI(t) = [\delta E(t) - (\gamma + \alpha + \mu) I(t)] dt + \sigma_3 I(t) dB_3(t) + \int_{\mathbf{Y}} C_3(z) I(t^-) \tilde{N}(dt, dz), \\ dR(t) = [\gamma I(t) - \mu R(t)] dt + \sigma_4 R(t) dB_4(t) + \int_{\mathbf{Y}} C_4(z) R(t^-) \tilde{N}(dt, dz). \end{cases} \quad (2)$$

显然，系统(2)是一个跳扩散 SEIR 模型，并且是系统(1)的随机情形. 在系统(2)中， $B_k(t)$ ($k=1,2,3,4$)是定义在完备空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 上的独立 Brown 运动； $N(dt, dz)$ 是具有平稳补偿 $\Pi(dz)dt$ 的 Poisson 计数测度，这里 Π 定义在 $\mathbb{Y}$ 上且满足 $\Pi(\mathbb{Y}) < \infty$ ， $\mathbb{Y}$ 是 $(0, \infty)$ 上的一个可测子集； $\tilde{N}(dt, dz) := N(dt, dz) - \Pi(dz)dt$ ； $C_i: \mathbb{Y} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($i=1,2,3,4$)是关于 Π 的连续有界函数. 假设 $B_i(t)$ ($i=1,2,3,4$)和 N 相互独立.

本文假设下列条件成立：

$$(H) \quad C_i(z) > -1, \int_{\mathbf{Y}} \frac{1}{1 + C_i(z)} \Pi(dz) < \infty, \int_{\mathbf{Y}} \ln^2(1 + C_i(z)) \Pi(dz) < \infty, i = 1, 2, 3, 4 \text{ 且} \\ \int_{\mathbf{Y}} |\ln(1 + C_3(z))|^q \Pi(dz) < \infty, \forall q \geq 2.$$

采用与文献[9]中定理 2.1 类似的讨论可知，对任意的 $(S(0), I(0), E(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ ，系统(2)存在唯一的全局正解. 令 $X(t) = \frac{E(t)}{I(t)}$ ，由广义的 Itô 公式知， $X(t)$ 满足

$$dX(t) = \{ \beta S(t)[1 + \theta X(t)] + \lambda X(t) - \delta X^2(t) \} dt + X(t)[\sigma_2 dB_2(t) - \sigma_3 dB_3(t)] + \\ \int_{\mathbf{Y}} \frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)} X(t^-) \tilde{N}(dt, dz),$$

其中

$$\lambda = \gamma + \alpha + \sigma_3^2 - \delta + \int_{\mathbf{Y}} \frac{C_3(z)(C_3(z) - C_2(z))}{1 + C_3(z)} \Pi(dz).$$

从而可得一个与系统(2)等价的系统：

$$\begin{cases} dS(t) = \{ \Lambda - \beta S(t)I(t)[1 + \theta X(t)] - \mu S(t) \} dt + \sigma_1 S(t) dB_1(t) + \int_{\mathbf{Y}} C_1(z) S(t^-) \tilde{N}(dt, dz), \\ dX(t) = \{ \beta S(t)[1 + \theta X(t)] + \lambda X(t) - \delta X^2(t) \} dt + X(t)[\sigma_2 dB_2(t) - \sigma_3 dB_3(t)] + \\ \int_{\mathbf{Y}} \frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)} X(t^-) \tilde{N}(dt, dz), \\ dI(t) = [\delta X(t)I(t) - (\gamma + \alpha + \mu) I(t)] dt + \sigma_3 I(t) dB_3(t) + \int_{\mathbf{Y}} C_3(z) I(t^-) \tilde{N}(dt, dz). \end{cases} \quad (3)$$

本文研究系统(3)的渐近行为.

1 辅助系统

记 $\mathbb{R}_+^n = (0, \infty)^n$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 令 $(S_{s,x}^\epsilon(t), X_{s,x}^\epsilon(t))$ 为系统

$$\begin{cases} dS^\epsilon(t) = \{\Lambda - \epsilon\beta S^\epsilon(t)[1 + \theta X^\epsilon(t)] - \mu S^\epsilon(t)\}dt + \sigma_1 S^\epsilon(t)dB_1(t) + \int_{\mathbf{Y}} C_1(z)S^\epsilon(t^-)\tilde{N}(dt,dz), \\ dX^\epsilon(t) = \{\beta S^\epsilon(t)[1 + \theta X^\epsilon(t)] + \lambda X^\epsilon(t) - \delta(X^\epsilon(t))^2\}dt + X^\epsilon(t)[\sigma_2 dB_2(t) - \sigma_3 dB_3(t)] + \\ \int_{\mathbf{Y}} \frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)}X^\epsilon(t^-)\tilde{N}(dt,dz), \end{cases} \quad (4)$$

满足初值 $(S^\epsilon(0), X^\epsilon(0)) = (s, x)$ 的解.

引理 1 对任意的 $\epsilon > 0$, $(S_{s,x}^\epsilon(t), X_{s,x}^\epsilon(t))$ 在 $\mathbb{R}_+^2$ 上有唯一遍历的不变测度 π_ϵ^* .

证明: 考虑扩散过程

$$\begin{cases} d\bar{S}(t) = \{\Lambda - \epsilon\bar{\beta}\bar{S}(t)[1 + \theta\bar{X}(t)] - \mu\bar{S}(t)\}dt + \sigma_1\bar{S}(t)dB_1(t), \\ d\bar{X}(t) = \{\bar{\beta}\bar{S}(t)[1 + \theta\bar{X}(t)] + \lambda\bar{X}(t) - \delta(\bar{X}(t))^2\}dt + \bar{X}(t)[\sigma_2 dB_2(t) - \sigma_3 dB_3(t)]. \end{cases} \quad (5)$$

由于系统(5)具有非退化的扩散, 不难验证过程 $(\bar{S}(t), \bar{X}(t))$ 的转移概率函数关于 Lebesgue 测度是绝对连续的, 因此转移概率函数具有正的、光滑的密度函数. 根据文献[12]的定理 5.2 可知, 过程 $(S_{s,x}^\epsilon(t), X_{s,x}^\epsilon(t))$ 也具有正的、光滑的密度函数. 即 $(S_{s,x}^\epsilon(t), X_{s,x}^\epsilon(t))$ 具有强 Feller 性和不可约性.

令 $V(S, X) = (S - 1 - \ln S) + \epsilon(X - 1 - \ln X)$. 为方便, 取

$$\begin{aligned} A &= \mu + \frac{\sigma_1^2}{2} + \int_{\mathbf{Y}} [C_1(z) - \ln(1 + C_1(z))] \Pi(dz), \\ B &= -\lambda + \frac{1}{2}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \int_{\mathbf{Y}} \left(\frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)} - \ln \frac{1 + C_2(z)}{1 + C_3(z)} \right) \Pi(dz). \end{aligned}$$

利用 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} LV(S, X) &= -(\mu + \epsilon\beta\theta)S - \frac{\Lambda}{S} + (\epsilon\beta\theta + \epsilon\lambda + \epsilon\delta)X - \epsilon\delta X^2 - \epsilon\beta \frac{S}{X} + \Lambda + \epsilon\beta + A + \epsilon B \leqslant \\ &= -(\mu + \epsilon\beta\theta)S - \frac{\Lambda}{2S} + (\epsilon\beta\theta + \epsilon\lambda + \epsilon\delta)X - \epsilon\delta X^2 - \frac{\sqrt{2\epsilon\Lambda\beta}}{\sqrt{X}} + \Lambda + \epsilon\beta + A + \epsilon B \leqslant \\ &= -(\mu + \epsilon\beta\theta)S - \frac{\Lambda}{2}\ln S + (\epsilon\beta\theta + \epsilon\lambda + \epsilon\delta)X - \epsilon\delta X^2 - \frac{\sqrt{2\epsilon\Lambda\beta}}{2}\ln X + \Lambda + \epsilon\beta + A + \epsilon B, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 L 是 $(S_{s,x}^\epsilon(t), X_{s,x}^\epsilon(t))$ 的生成元. 由式(6)可知, 存在正常数 a, b 使得 $LV(S, X) \leqslant -aV(S, X) + b$ 在 $\mathbb{R}_+^2$ 上成立. 根据文献[13]的定理 6.1 可知结论成立. 证毕.

令 $(S_{s,x}^0(t), X_{s,x}^0(t))$ 为系统

$$\begin{cases} dS^0(t) = (\Lambda - \mu S^0(t))dt + \sigma_1 S^0(t)dB_1(t) + \int_{\mathbf{Y}} C_1(z)S^0(t^-)\tilde{N}(dt,dz), \\ dX^0(t) = \{\beta S^0(t)[1 + \theta X^0(t)] + \lambda X^0(t) - \delta(X^0(t))^2\}dt + \\ X^0(t)[\sigma_2 dB_2(t) - \sigma_3 dB_3(t)] + \int_{\mathbf{Y}} \frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)}X^0(t^-)\tilde{N}(dt,dz) \end{cases} \quad (7)$$

满足初值 $(S^0(0), X^0(0)) = (s, x)$ 的解. 采用与引理 1 类似的方法可知, $(S_{s,x}^0(t), X_{s,x}^0(t))$ 也是遍历的. 易验证 $(S_{0,0}^0(t), X_{0,0}^0(t)) \in \mathbb{R}_+^2, t \in (0, \infty)$ a. s. 因此, 对任意的 $(s, x) \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$, $(S_{s,x}^0(t), X_{s,x}^0(t))$ 具有唯一遍历的不变测度 $\pi^* := \pi^*(du, dv)$.

由引理 1 的证明可知, 对任意的 $\epsilon \geqslant 0$, $(S_{s,x}^\epsilon(t), X_{s,x}^\epsilon(t))$ 都是一个强 Feller 过程. 用 L_ϵ 表示 $(S_{s,x}^\epsilon(t), X_{s,x}^\epsilon(t))$ 的生成元. 易验证, 对任意的 $f \in C^2(\mathbb{R}_+^2), \lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_\epsilon f = L_0 f$. 根据文献[14]的定理 2.5 可知, $(S_{s,x}^\epsilon(t), X_{s,x}^\epsilon(t)) \Rightarrow (S_{s,x}^0(t), X_{s,x}^0(t))$. 再利用 $(S_{s,x}^\epsilon(t), X_{s,x}^\epsilon(t)) (\epsilon \geqslant 0)$ 的遍历性, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \delta X_{s,x}^\epsilon(\tau) d\tau \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \delta X_{s,x}^0(\tau) d\tau, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \forall (s, x) \in \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

令

$$\Xi:=\delta\int_{\mathbb{R}^2_+}u\pi^*(du,dv)-c_3,\quad \Xi_i:=\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t[\delta X_{i,0}^0(\tau)-c_3]d\tau,$$

其中 $c_3:=\gamma+\alpha+\mu+\frac{\sigma_3}{2}+\int_{\mathbf{Y}}[C_3(z)-\ln(1+C_3(z))]\Pi(dz)$. 因此, 有 $\lim_{c\rightarrow 0}\Xi_c=\Xi$.

2 疾病灭绝与持久的阈值

用 $(S_{s,x,i}(t), X_{s,x,i}(t), I_{s,x,i}(t))$ 表示模型 (3) 具有初值 $(s, x, i) \in \mathbb{R}^3_+$ 的解, 其生成元仍记为 L . 为方便, 记 $g(t):=\sigma_3B_3(t)+\int_0^t\int_{\mathbf{Y}}\ln(1+C_3(z))\widetilde{N}(d\tau,dz)$.

定理 1 如果 $\Xi<0$, 则对任意的 $(s, x, i) \in \mathbb{R}^3_+$, 有 $\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{\ln I_{s,x,i}(t)}{t}\leqslant\Xi$ a. s.

证明: 由 Itô 公式可得

$$\ln I_{s,x,i}(t)=\ln i+\int_0^t[\delta X_{s,x,i}(\tau)-c_3]d\tau+g(t)\leqslant\ln i+\int_0^t[\delta X_{s,x}^0(\tau)-c_3]d\tau+g(t).$$

(8)

由大数定律可得 $\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{g(t)}{t}=0$ a. s. 再结合系统 (7) 的遍历性立得

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{\ln I_{s,x,i}(t)}{t}\leqslant\lambda$$

a. s.

证毕.

下面在 $\Xi>0$ 成立的情形下, 建立系统 (3) 的遍历性及其收敛速率. 为此先构造一个辅助函数 $V: \mathbb{R}^3_+\rightarrow[1,\infty)$, 满足

$$\mathbb{E}[V(S_{s,x,i}(t^*), X_{s,x,i}(t^*), I_{s,x,i}(t^*))]\leqslant V(s,x,i)-\kappa_1V^\gamma(s,x,i)+\kappa_2\mathbf{1}_{\{(s,x,i)\in K\}},$$

这里 K 是某个合适的 Petite 集, 且 $\gamma\in(0,1)$, $\kappa_1,\kappa_2>0$, $t^*>1$.

引理 2 假设 $q>1$, 存在正常数 $K_1,K_2>0$, 使得对任意的 $(s, x, i) \in \mathbb{R}^3_+$ 和 $A\in\mathcal{F}$, 有

$$\mathbb{E}[(\ln I_{s,x,i}(t))_+^{1+q}\mathbf{1}_A]\leqslant(\ln i)_+^{1+q}\cdot\mathbb{P}(A)+K_1t\sqrt{\mathbb{P}(A)}(\ln i)_+^q+K_2t^{1+q}\sqrt{\mathbb{P}(A)},\quad t\geqslant 1,$$

其中 $(\ln x)_+=\max\{0,-\ln x\}$.

证明: 由式 (8) 可得 $-\ln I_{s,x,i}(t)\leqslant-\ln i+c_3t-g(t)$. 因此, $(\ln I_{s,x,i}(t))_+\leqslant(\ln i)_++|c_3t-g(t)|$. 由不等式

$$(a+b)^{1+q}\leqslant a^{1+q}+(1+q)2^{q-1}a^qb+2^{q-1}b^{1+q},\quad a,b\geqslant 0$$

可得

$$(\ln I_{s,x,i}(t))_+^{1+q}\leqslant(\ln i)_+^{1+q}+(1+q)2^{q-1}|c_3t-g(t)|\cdot(\ln i)_+^q+2^{q-1}|c_3t-g(t)|^{1+q}.$$

(9)

利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|c_3t-g(t)|\mathbf{1}_A)&\leqslant\{\mathbb{E}[|c_3t-g(t)|^{2(1+q)}]\}^{1/[2(1+q)]}(\mathbb{P}(A))^{(1+2q)/[2(1+q)]}\leqslant\\&\quad\{\mathbb{E}[|c_3t-g(t)|^{2(1+q)}]\}^{1/[2(1+q)]}(\mathbb{P}(A))^{1/2},\\ \mathbb{E}(|c_3t-g(t)|^{1+q}\mathbf{1}_A)&\leqslant\{\mathbb{E}[|c_3t-g(t)|^{2(1+q)}]\}^{1/2}(\mathbb{P}(A))^{1/2}.\end{aligned}$$

利用 Kunita 第一不等式和 Burkholder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|c_3t-g(t)|^{2(1+q)}]&\leqslant 3^{1+2q}\mathbb{E}\Big(|c_3t|^{2(1+q)}+|\sigma_3B_3(t)|^{2(1+q)}+\Big|\int_0^t\int_{\mathbf{Y}}\ln(1+C_3(z))\widetilde{N}(d\tau,dz)\Big|^{2(1+q)}\Big)\leqslant\\&\quad 3^{1+2q}\Big\{|c_3t|^{2(1+q)}+D\sigma_3^{2(1+q)}t^{1+q}+D\Big[\int_{\mathbf{Y}}\ln^2(1+C_3(z))\Pi(dz)\Big]^{1+q}t^{1+q}+\\&\quad D\int_{\mathbf{Y}}|\ln(1+C_3(z))|^{2(1+q)}\Pi(dz)\cdot t\Big\}\leqslant Mt^{2(1+q)},\end{aligned}$$

这里 D 为 Kunita 第一不等式和 Burkholder 不等式中给定的常数, 且

$$\begin{aligned}M&=3^{1+2q}\Big\{|c_3|^{2(1+q)}+D\sigma_3^{2(1+q)}+D\Big[\int_{\mathbf{Y}}\ln^2(1+C_3(z))\Pi(dz)\Big]^{1+q}+\\&\quad D\int_{\mathbf{Y}}|\ln(1+C_3(z))|^{2(1+q)}\Pi(dz)\Big\}+1.\end{aligned}$$

因此, $\mathbb{E}(|c_3 t - g(t)| \mathbf{1}_A) \leq M t \sqrt{\mathbb{P}(A)}$, $\mathbb{E}(|c_3 t - g(t)|^{1+q} \mathbf{1}_A) \leq M t^{1+q} \sqrt{\mathbb{P}(A)}$. 在式(9)两端乘以 $\mathbf{1}_A$ 并取期望可得

$$\mathbb{E}[(\ln I_{s,x,i}(t))^{1+q} \mathbf{1}_A] \leq (\ln i)^{1+q} \mathbb{P}(A) + (1+q) 2^{q-1} M t \sqrt{\mathbb{P}(A)} (\ln i)^q + 2^{q-1} M t^{1+q} \sqrt{\mathbb{P}(A)}.$$
证毕.

令 $\epsilon = \exp\{-\Xi T\}$. 根据 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Xi_\epsilon = \Xi$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = 0$ a. s., 取充分大的 $T > 0$ 和足够小的 $\rho > 0$, 使得 $\Xi_\epsilon \geq \frac{10}{12} \Xi$, $\frac{\Xi}{2}(1-\rho) - K_1 \sqrt{\rho} > \frac{\Xi}{4}$, $\mathbb{P}(\Omega_*^c) < \rho$, 其中 $\Omega_* := \Omega_*^1 \cap \Omega_*^2$, 且

$$\Omega_*^1 = \left\{ \frac{g(t)}{t} \geq -\frac{\Xi}{4}, \forall t \geq T \right\}, \quad \Omega_*^2 = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t [\delta X_{0,0}^\epsilon(\tau) - c_3] d\tau \geq \frac{3\Xi}{4}, \forall t \geq T \right\}.$$

引理 3 假设 $\Xi > 0$, 则对任意的 $(s, x, i) \in \mathbb{R}_+^2 \times [\epsilon, \infty)$, 有

$$\mathbb{E}[(\ln I_{s,x,i}(T))^{1+q}] \leq (\ln i)^{1+q} - \Xi \cdot T (\ln i)^q + K_3 T^{1+q},$$

这里 $K_3 = \Xi^{1+q} + \Xi^q K_1 + K_2$.

证明: 由引理 2 可知, 对任意的 $i \in [\epsilon, \infty)$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\ln I_{s,x,i}(T))^{1+q}] &\leq (\ln i)^{1+q} + K_1 T (\ln i)^q + K_2 T^{1+q} \leq \\ &(\ln i)^{1+q} - \Xi T (\ln i)^q + (\Xi + K_1) T (\ln i)^q + K_2 T^{1+q} = \\ &(\ln i)^{1+q} - \Xi T (\ln i)^q + K_3 T^{1+q}. \end{aligned} \tag{10}$$

证毕.

引理 4 假设 $\Xi > 0$, 则对任意的 $(s, x, i) \in \mathbb{R}_+^2 \times (0, \epsilon)$, 有

$$\mathbb{E}[(\ln I_{s,x,i}(T))^{1+q}] \leq (\ln i)^{1+q} - \frac{\Xi T}{4} (\ln i)^q + 2K_3 T^{1+q}.$$

证明: 定义停时 $\zeta_{s,x,i} = \inf\{t \geq 0: I_{s,x,i}(t) \geq \epsilon\}$. 令

$$\Omega_1 = \{\zeta_{s,x,i} \geq T\} \cap \Omega_*, \quad \Omega_2 = \{\zeta_{s,x,i} < T\}, \quad \Omega_3 = \Omega - (\Omega_1 \cup \Omega_2).$$

当 $\omega \in \Omega_1$ 时, 由比较定理知 $X_{s,x,i}(t) \geq X_{s,x}^\epsilon(t) \geq X_{0,0}^\epsilon(t)$, $\forall t \in [0, T]$ a. s. 因此, 对任意的 $(s, x, i) \in (0, \infty)^2 \times (0, \epsilon)$, 有

$$0 > \ln(I_{s,x,i}(T)) = \ln i + \int_0^T [\delta X_{s,x,i}(\tau) - c_3] d\tau + g(T) \geq \ln i + \frac{\Xi T}{2} \text{ 于 } \Omega_1. \tag{11}$$

将式(11)两边平方、同乘 $\mathbf{1}_{\Omega_1}$, 再取期望, 得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\ln(I_{s,x,i}(T)))^{1+q} \cdot \mathbf{1}_{\Omega_1}] &\leq \left[(\ln i)_- - \frac{\Xi T}{2} \right]^{1+q} \mathbb{P}(\Omega_1) \leq \\ &\left[(\ln i)_- - \frac{\Xi T}{2} \right] (\ln i)^q \cdot \mathbb{P}(\Omega_1) = \left[(\ln i)^{1+q} - \frac{\Xi T}{2} (\ln i)^q \right] \cdot \mathbb{P}(\Omega_1). \end{aligned} \tag{12}$$

当 $\omega \in \Omega_2$ 时, 根据引理 2、式(10)和强 Markov 性, 对任意的 $0 < t < T$ 和 $i \in (0, \epsilon)$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\ln(I_{s,x,i}(T)))^{1+q} \mid \zeta_{s,x,i} = t, I_{s,x,i}(\zeta_{s,x,i}) = \epsilon] &\leq \\ &(\ln \epsilon)^{1+q} + K_1 (T-t) (\ln \epsilon)^q + K_2 (T-t)^{1+q} \leq \\ &(\ln \epsilon)^{1+q} + K_1 T (\ln \epsilon)^q + K_2 T^{1+q} \leq (\ln i)^{1+q} - \Xi T (\ln i)^q + K_3 T^{1+q}. \end{aligned}$$

因此,

$$\mathbb{E}[(\ln(I_{s,x,i}(T)))^{1+q} \cdot \mathbf{1}_{\Omega_2}] \leq [(\ln i)^{1+q} - \Xi T (\ln i)^q + K_3 T^{1+q}] \cdot \mathbb{P}(\Omega_2). \tag{13}$$

由于 $\Omega_3 \subset \Omega_*^c$, 所以 $\mathbb{P}(\Omega_3) < \rho$. 根据引理 2, 有

$$\mathbb{E}[(\ln I_{s,x,i}(T))^{1+q} \cdot \mathbf{1}_{\Omega_3}] \leq (\ln i)^{1+q} \cdot \mathbb{P}(\Omega_3) + K_1 T \sqrt{\mathbb{P}(\Omega_3)} (\ln i)^q + K_2 T^{1+q}. \tag{14}$$

综合式(12)~(14), 对任意的 $(s, x, i) \in (0, \infty)^2 \times (0, \epsilon)$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\ln(I_{s,x,i}(T)))^{1+q}] &\leq (\ln i)^{1+q} - \left[\frac{\Xi}{2}(1-\rho) - K_1 \sqrt{\rho} \right] T (\ln i)^q + 2K_3 T^{1+q} \leq \\ &(\ln i)^{1+q} - \frac{\Xi T}{4} (\ln i)^q + 2K_3 T^{1+q}. \end{aligned}$$

证毕.

引理 5 令 $U(S, X, I) = (S + XI + I)^{1+p} + X^{p/2} - \ln S - \ln X$, $(S, X, I) \in \mathbb{R}_+^3$, 这里 $p > 0$ 为充分小的实数. 则存在正常数 K_4 和 K_5 , 满足

$$e^{K_4 t} \mathbb{E}[U(S_{s,x,i}(t), X_{s,x,i}(t), I_{s,x,i}(t))] \leq U(s, x, i) + \frac{K_5(e^{K_4 t} - 1)}{K_4}. \tag{15}$$

证明: 要证明式(15)成立, 只需证明 $\forall (S, X, I) \in \mathbb{R}_+^3$, $LU(S, X, I) \leq K_5 - K_4 U(S, X, I)$ 即可. 令 $Y = S + XI + I$, 则 $U = Y^{1+p} + X^{p/2} - \ln S - \ln X$. 首先, 利用 Itô 公式计算可得

$$\begin{aligned} LY^{1+p} &= (1+p)Y^p[\Lambda - \mu S - (\gamma + \alpha + \mu)I - \mu XI] + \frac{p(1+p)}{2}Y^{p-1}[\sigma_1^2 S^2 + \sigma_2^2 (XI)^2 + \sigma_3^2 I^2] + \\ &\quad \int_{\mathbf{Y}} [(Y + C_1(z)S + C_2(z)XI + C_3(z)I)^{1+p} - Y^{1+p} - \\ &\quad (1+p)Y^p(C_1(z)S + C_2(z)XI + C_3(z)I)]\Pi(dz) \leq \\ &\quad (1+p)\Lambda Y^p - (1+p)\mu Y^{p+1} + \frac{p(1+p)}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)Y^{p+1} + \\ &\quad Y^{1+p} \int_{\mathbf{Y}} f\left(\frac{C_1(z)S + C_2(z)XI + C_3(z)I}{Y}\right)\Pi(dz), \end{aligned} \tag{16}$$

这里 $f(s) = (1+s)^{1+p} - 1 - (1+p)s$, $s \in (-1, \infty)$. 由于 $f(s) \geq 0$ 为 $(-1, \infty)$ 上的凸函数, 满足 $f(0) = 0$ 和 $\lim_{p \rightarrow 0+} f(s) = 0$, 因此

$$f\left(\frac{C_1(z)S + C_2(z)XI + C_3(z)I}{Y}\right) \leq \max\{f(-1), f(|C_1(z)| + |C_2(z)| + |C_3(z)|)\}.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可知, 当 $p \rightarrow 0$ 时, $\int_{\mathbf{Y}} f\left(\frac{C_1(z)S + C_2(z)XI + C_3(z)I}{Y}\right)\Pi(dz) \rightarrow 0$ 在 $\mathbb{R}_+^3$ 上关于 (S, X, I) 一致成立. 取充分小的 $p > 0$, 满足

$$-(1+p)\mu + \frac{p(1+p)}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \int_{\mathbf{Y}} f\left(\frac{C_1(z)S + C_2(z)XI + C_3(z)I}{Y}\right)\Pi(dz) \leq -\frac{1+p}{2}\mu.$$

因此, 式(16)可变为

$$LY^{1+p} \leq (1+p)\Lambda Y^p - \frac{1+p}{2}\mu Y^{p+1}. \tag{17}$$

下面分别计算 $LX^{p/2}$ 和 $L(-\ln S - \ln X)$:

$$\begin{aligned} LX^{p/2} &= \frac{p}{2}X^{p/2-1}[\beta S(1 + \theta X) + \lambda X - \delta X^2] + \frac{p(p-2)}{8}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)X^{p/2} + \\ &\quad X^{p/2} \int_{\mathbf{Y}} \left[\left(1 + \frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)}\right)^{p/2} - 1 - \frac{p}{2} \frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)} \right] \Pi(dz) = \\ &\quad \frac{p}{2}\beta SX^{p/2-1} + \frac{p}{2}\beta \theta SX^{p/2} + \bar{\omega}_1 X^{p/2} - \frac{p}{2}\delta X^{1+p/2}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$L(-\ln S - \ln X) = -\frac{\Lambda}{S} + \beta I + \beta \theta XI - \frac{\beta S}{X} - \beta \theta S + \delta X + \bar{\omega}_2, \tag{19}$$

其中

$$\bar{\omega}_1 := \frac{p}{2}\lambda + \frac{p(p-2)}{8}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \int_{\mathbf{Y}} \left[\left(1 + \frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)}\right)^{p/2} - 1 - \frac{p}{2} \frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)} \right] \Pi(dz),$$

$$\bar{\omega}_2 := \mu + \frac{\sigma_1^2}{2} + \int_{\mathbf{Y}} [C_1(z) - \ln(1 + C_1(z))]\Pi(dz) - \lambda + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2} +$$

$$\int_{\mathbf{Y}} \left[\frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)} - \ln\left(1 + \frac{C_2(z) - C_3(z)}{1 + C_3(z)}\right) \right] \Pi(dz).$$

综合式(17)~(19), 得

$$LU \leq (1+p)\Lambda Y^p - \frac{1+p}{2}\mu Y^{p+1} + \frac{p}{2}\beta SX^{p/2-1} + \frac{p}{2}\beta \theta SX^{p/2} + \bar{\omega}_1 X^{p/2} - \frac{p}{2}\delta X^{1+p/2} -$$

$$\frac{\Lambda}{S} + \beta I + \beta \theta X I - \frac{\beta S}{X} + \delta X + \bar{\omega}_2.$$

由 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} S X^{p/2} &\leq \frac{4-p}{4+p} S^{1+2p/(4-p)} + \frac{2p}{4+p} X^{1+p/4}, \\ \frac{p}{2} \beta S X^{p/2-1} - \frac{\beta S}{X} - \frac{\Lambda}{S} &\leq \frac{\beta S}{X} \left[\frac{p}{2} (1+X) - 1 \right] - \frac{\Lambda}{S} = \frac{p}{2} \beta S - \frac{2-p}{2} \frac{\beta S}{X} - \frac{\Lambda}{S} \leq \\ \frac{p}{2} \beta S - \frac{\sqrt{(2-p)\beta\Lambda}}{\sqrt{X}} - \frac{\Lambda}{2S} &\leq \frac{p}{2} \beta S + \frac{\sqrt{(2-p)\beta\Lambda}}{2} \ln X + \frac{\Lambda}{2} \ln S. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} LU(S, X, I) &\leq (1+p)\Lambda Y^p - \frac{1+p}{2} \mu Y^{p+1} + \frac{p}{2} \beta S + \frac{\sqrt{(2-p)\beta\Lambda}}{2} \ln X + \frac{\Lambda}{2} \ln S + \\ \frac{p}{2} \beta \theta &\left(\frac{4-p}{4+p} S^{1+2p/(4-p)} + \frac{2p}{4+p} X^{1+p/4} \right) + \bar{\omega}_1 X^{p/2} - \frac{p}{2} \delta X^{1+p/2} + \beta I + \beta \theta X I + \delta X + \bar{\omega}_2 \leq \\ (1+p)\Lambda Y^p &- \frac{1+p}{2} \mu Y^{p+1} + \frac{p}{2} \beta Y + \frac{\sqrt{(2-p)\beta\Lambda}}{2} \ln X + \frac{\Lambda}{2} \ln S + \\ \frac{p}{2} \beta \theta &\left(\frac{4-p}{4+p} Y^{1+2p/(4-p)} + \frac{2p}{4+p} X^{1+p/4} \right) + \bar{\omega}_1 X^{p/2} - \frac{p}{2} \delta X^{1+p/2} + \beta I + \beta \theta X I + \delta X + \bar{\omega}_2. \end{aligned}$$

取 $K_4 := \min\left\{\frac{(1+p)\mu}{4}, \frac{\sqrt{(2-p)\beta\Lambda}}{2}, \frac{\Lambda}{2}\right\}$ 和 $K_5 = \sup_{(S, X, I) \in \mathbb{R}_+^3} \{LU(S, X, I) + K_4 U(S, X, I)\}$ 可知结论成立. 证毕.

定理 2 令 $\varepsilon > 0$, 则存在不变概率测度 Π 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{q^*} \|P(t, (s, x, i), \cdot) - \Pi(\cdot)\| = 0$ ($\forall (s, x, i) \in \mathbb{R}_+^3$), 其中 $P(t, (s, x, i), \cdot)$ 是 $(S(t), X(t), I(t))$ 的转移概率函数, $\|\cdot\|$ 为全变差范数, q^* 为任意正常数.

证明: 采用与引理 1 类似的讨论可知, $(S(t), X(t), I(t))$ 在 $\mathbb{R}_+^3$ 上具有正的、光滑的密度函数. 因此, Markov 过程 $(S_{s,x,i}(t), X_{s,x,i}(t), I_{s,x,i}(t))$ 是不可约的和非周期的, 并且每个紧子集都是 Petite 集. 由式(15)知, 存在常数 $h > 0$ 和 $H > 0$, 满足

$$\mathbb{E}[U(S_{s,x,i}(T), X_{s,x,i}(T), I_{s,x,i}(T))] \leq (1-h)U(s, x, i) + H, \quad \forall (s, x, i) \in \mathbb{R}_+^3. \quad (20)$$

令 $V(s, x, i) = U(s, x, i) + (\ln i)_-^{1+q}$, 其中 $q \in [1, \infty)$. 不失一般性, 假设 $U(s, x, i) \geq 1$, 则

$$[U + (\ln i)_-^q]^{1+q} = [U + (\ln i)_-^q]^{[(1+q)/q]q} \geq [U^{(1+q)/q} + (\ln i)_-^{1+q}]^q \geq [U + (\ln i)_-^{1+q}]^q = V^q.$$

由引理 3、引理 4 和式(20)可知, 对任意的 $q \in [1, \infty)$, 均有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(S_{s,x,i}(T), X_{s,x,i}(T), I_{s,x,i}(T))] &\leq \\ V(s, x, i) - \min\left\{\frac{\varepsilon T}{4}, h\right\} [U(s, x, i) + (\ln i)_-^q] &+ H + 2K_3 T^{1+q} \leq \\ V(s, x, i) - \min\left\{\frac{\varepsilon T}{4}, h\right\} V^{q/(1+q)}(s, x, i) &+ H + 2K_3 T^{1+q}. \end{aligned}$$

因此, 存在紧集 $K \subset \mathbb{R}_+^3$ (即 Petite 集), $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$, 满足

$$\mathbb{E}[V(S_{s,x,i}(T), X_{s,x,i}(T), I_{s,x,i}(T))] \leq V(s, x, i) - \kappa_1 [V(s, x, i)]^{q/(1+q)} + \kappa_2 \mathbf{1}_{\{(s, x, i) \in K\}}. \quad (21)$$

事实上, 为使式(21)成立, 只需令 $\kappa_1 = \frac{1}{2} \min\left\{\frac{\varepsilon T}{4}, h\right\}$, K 取为以零为中心、半径充分大的圆形, 且满足

$$-\kappa_1 [V(s, x, i)]^{q/(1+q)} + H + 2K_3 T^{1+q} < 0, \quad (s, x, i) \notin K.$$

根据文献[15]中定理 2.2 或文献[16]中定理 3.6, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{q^*} \|P(t, (s, x, i), \cdot) - \Pi(\cdot)\| = 0$ ($\forall (s, x, i) \in \mathbb{R}_+^3$), 这里 $q^* = q$. 证毕.

综上所述, 本文考虑了一类潜伏期具有传染性的跳扩散 SEIR 流行病模型, 从理论上确定了疾病

发生与否的阈值. 当 $\Xi < 0$ 时, 疾病依指数灭绝, 而当 $\Xi > 0$ 时系统(3)的转移概率函数会依任意阶多项式收敛到唯一的不变测度. 鉴于系统(2)和系统(3)的等价性, 上述阈值行为对系统(2)也成立. 尽管该阈值是以积分形式给出的, 其显示表达仍有待探索, 但在应用中可以利用数值模拟弥补这一缺陷. 此外, 为得到系统解的转移概率函数依任意阶多项式遍历, 在假设条件(H)中关于 $C_3(z)$ 施加了一个相对严格的条件: $\int_{\mathbf{Y}} |\ln(1 + C_3(z))|^q \Pi(dz) < \infty, \forall q \geq 2$. 若只想得到遍历性而对收敛速度没有要求, 则可以去除该条件.

参 考 文 献

- [1] HAO W H, ZHANG J P, JIN Z. Dynamic Analysis and Optimal Control of HIV/AIDS Model with Ideological Transfer [J]. Math Comput Simulation, 2024, 226: 578-605.
- [2] LUO Y T, HUANG J H, TENG Z D, et al. Role of ART and PrEP Treatments in a Stochastic HIV/AIDS Epidemic Model [J]. Math Comput Simulation, 2024, 221: 337-357.
- [3] ZHAI X P, LI W S, WEI F Y, et al. Dynamics of an HIV/AIDS Transmission Model with Protection Awareness and Fluctuations [J]. Chaos Solitons Fractals, 2023, 169: 113224-1-113224-13.
- [4] PIOVELLA N. Analytical Solution of SEIR Model Describing the Free Spread of the COVID-19 Pandemic [J]. Chaos Solitons Fractals, 2020, 140: 110243-1-110243-6.
- [5] ANNAS S, ISBAR PRATAMA M, RIFANIDI M, et al. Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for Pandemic COVID-19 Spread in Indonesia [J]. Chaos Solitons Fractals, 2020, 139: 110072-1-110072-7.
- [6] FRANCO N. COVID-19 Belgium: Extended SEIR-QD Model with Nursing Homes and Long-Term Scenarios-Based Forecasts [J]. Epidemics, 2021, 37(Suppl C): 100490-1-100490-21.
- [7] JIAO J J, LIU Z Z, CAI S H. Dynamics of an SEIR Model with Infectivity in Incubation Period and Homestead-Isolation on the Susceptible [J]. Appl Math Lett, 2020, 107: 106442-1-106442-7.
- [8] WEI F Y, XUE R. Stability and Extinction of SEIR Epidemic Models with Generalized Nonlinear Incidence [J]. Math Comput Simulat, 2020, 170: 1-15.
- [9] YANG Q S, JIANG D Q, SHI N Z, et al. The Ergodicity and Extinction of Stochastically Perturbed SIR and SEIR Epidemic Models with Saturated Incidence [J]. J Math Anal Appl, 2012, 388(1): 248-271.
- [10] WITBOOI P J. Stability of an SEIR Epidemic Model with Independent Stochastic Perturbations [J]. Phys A, 2013, 392(20): 4928-4936.
- [11] HAN Q X, CHEN L, JIANG D Q. A Note on the Stationary Distribution of Stochastic SEIR Epidemic Model with Saturated Incidence Rate [J/OL]. Sci Rep, (2017-06-21)[2025-01-18]. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-03858-8>.
- [12] XI F B, ZHU C. On Feller and Strong Feller Properties and Exponential Ergodicity of Regime-Switching Jump Diffusion Processes with Countable Regimes [J]. SIAM J Control Optim, 2017, 55(3): 1789-1818.
- [13] MEYN S P, TWEEDIE R L. Stability of Markovian Processes III: Foster-Lyapunov Criteria for Continuous-Time Processes [J]. Adv Appl Probab, 1993, 25(3): 518-548.
- [14] ETHIER S N, KURTZ T G. Markov Processes: Characterization and Convergence [M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005: 167-168.
- [15] DIEU N T, NGUYEN D H, DU N H, et al. Classification of Asymptotic Behavior in a Stochastic SIR Model [J]. SIAM J Appl Dyn Syst, 2016, 15(2): 1062-1084.
- [16] JARNER S F, ROBERTS G O. Polynomial Convergence Rates of Markov Chains [J]. Ann Appl Probab, 2002, 12(1): 224-247.

(责任编辑: 赵立芹)