引用格式:何银,惠小静,彭晨雪. 基于BR_0-代数的程度化及有效推理研究[J]. 延安大学学报(自然科学版),2026,45(3):98-105. [HE Y,HUI X J,PENG C X. Research on graded and valid inference based on BR_0 algebraic[J]. Journal of Yan'an University(Natural Science Edition),2026,45(3):98-105.] **DOI**:10.13876/J.cnki.ydnse.260013

基于BR_0-代数的程度化及有效推理研究

何　银,惠小静*,彭晨雪

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘　要:研究了模糊命题逻辑系统中的条件随机真度理论,推导其性质并证明了逻辑运算的连续性。首先基于BR_0-代数语义,在模糊命题逻辑系统中提出了公式的p-条件随机真度,论证了p-条件随机真度具有的基本特性和运算性质,并提出了p-条件随机不可靠度;其次引入了条件有效推理和条件必要度的概念,并基于MP规则和HS规则证明了p-条件随机真度满足的推理性质;最后提出了公式间的p-条件随机相似度和p-条件随机伪距离,给出了其运算性质及不等式性质,在此基础上建立了p-条件随机逻辑度量空间,证明了逻辑算子的连续性,形成了该命题系统条件随机真度程度化研究的基本框架。研究结果完善了模糊命题逻辑系统中条件随机真度的计量化理论体系。

关键词:p-条件随机真度;p-条件随机不可靠度;p-条件随机伪距离;p-条件随机逻辑度量空间

中图分类号:O141.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1004-602X(2026)03-0098-08

数理逻辑作为现代计算机技术的基础,为知识表示、形式推理与定理证明提供了严密的符号体系与演算框架。在传统的经典命题逻辑中,抽象命题只有重言式和矛盾式的概念,而对于既非重言式又非矛盾式的绝大多数逻辑公式,并没有讨论它们的真实程度。因此,经典命题逻辑难以刻画现实世界中普遍存在的模糊性、随机性与不完备信息。事实上,早在半个世纪以前,逻辑学家们就注意到这一局限并提出了区分命题逻辑公式可靠程度的思想,以KOLMOGOROV[1]的概率公理化体系为基础,ADAMS[2]将概率理论与逻辑推理相结合,搭建了概率与逻辑融合的基础框架,提出了概率逻辑的核心思想和推理规则。2001年,王国俊等[3]在经典的二值命题逻辑中引入了一般逻辑公式的真度概念,并给出了逻辑公式真度值的计算公式。此后许多学者在多种命题逻辑系统中进行了相关研究[4-7],并由此形成了较为系统的计量逻辑学的基本框架[8-9]。在此基础上,惠小静等[10]将随机化引入逻辑空间,研究者开始向随机真度进行推广[11-13]。

计量逻辑学以真度、相似度、逻辑度量空间为核心工具,为近似推理、人工智能提供了统一的数学范式。文献[14-19]将随机化机制引入赋值空间,在二值、多值以及模糊命题逻辑系统中提出了公式的随机真度概念,并展开理论的发散度、近似推理以及度量空间拓扑性质的研究。文献[20]在三值乘积逻辑系统π_3中,研究了公式的Γ-绝对真度理论和推理规则。文献[21]将n值乘积命题逻辑系统Goguen进行扩张,提出了Goguen$_{\vee,\Delta}$系统,并研究了公式的真度理论。文献[22-25]在二值、n值Lukasiewicz和n值R_0命题逻辑系统中,引入了条件真度概念并开展了相应研究。

随着人工智能的快速发展,面对模糊性、随机

收稿日期:2026-01-16

基金项目:国家自然科学基金项目(12261090,12301456)

作者简介:何　银(1991—),男,硕士研究生,主要从事数理逻辑与不确定性推理研究。

*通信作者　E-mail:xhmxiaojing@163.com

性与有条件约束的信息，计量逻辑学仍存在不足。鉴于此，本文在基于BR_0-代数语义的模糊命题逻辑系统中，提出了命题在一定条件下的随机真度，即公式的p-条件随机真度，证明了p-条件随机真度的运算性质与推理性质。同时引入了p-条件随机不可靠度、条件有效推理和条件必要度的概念。在条件随机框架下构建了公式间的p-条件随机相似度和p-条件随机伪距离的概念，建立起p-条件随机逻辑度量空间并证明了逻辑算子的连续性。研究结果为后续在该系统展开计量化研究奠定了基础。

1　预备知识

设$S=\{q_1,q_2,\cdots\}$是原子公式的集合，$F(S)$是全体公式之集，即$F(S)$是由S生成的$(\neg,\vee,\rightarrow)$型自由代数。在$F(S)$中，用$A\wedge B$表示$\neg(\neg A\vee\neg B)$，用$A\otimes B$表示$\neg(A\rightarrow\neg B)$。$(\rightarrow,\otimes)$为伴随对，满足$a\otimes b\leqslant c$当且仅当$a\leqslant b\rightarrow c,a,b,c\in[0,1]$。

定义 1[6]　设M是$(\neg,\vee,\rightarrow)$型代数。如果

1）M上有偏序$\leqslant$使M成为有界分配格，且$\vee$是关于序$\leqslant$而言的上确界运算。

2）$\neg$是关于序$\leqslant$而言的逆序对合对应。

3）对任意的$a,b,c\in M$，以下条件成立：

$(BR_0C1)\neg a\rightarrow\neg b=b\rightarrow a$；

$(BR_0C2)1\rightarrow a=a,a\rightarrow a=1$；

$(BR_0C3)b\rightarrow c\leqslant(a\rightarrow b)\rightarrow(a\rightarrow c)$；

$(BR_0C4)a\rightarrow(b\rightarrow c)=b\rightarrow(a\rightarrow c)$；

$(BR_0C5)a\rightarrow b\vee c=(a\rightarrow b)\vee(a\rightarrow c)$；

$a\rightarrow b\wedge c=(a\rightarrow b)\wedge(a\rightarrow c)$。

其中，1是M中的最大元，并记$0=\neg 1$。则称M为BR_0-代数。

性质 1[6]　设M是BR_0-代数，$a,b,c\in M$，则

$(BR_0P1)a\leqslant b$当且仅当$a\rightarrow b=1$；

$(BR_0P2)a\rightarrow b$关于a不增，关于b不减；

$(BR_0P3)a\rightarrow b\leqslant a\vee c\rightarrow b\vee c$，

$a\rightarrow b\leqslant a\wedge c\rightarrow b\wedge c$；

$(BR_0P4)a\rightarrow b\leqslant(a\rightarrow c)\vee(c\rightarrow b)$；

$(BR_0P5)(a\rightarrow b)\vee(b\rightarrow a)=1$；

$(BR_0P6)(a\rightarrow b)\leqslant(b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow c)$；

$(BR_0P7)\neg(a\wedge b)=\neg a\vee\neg b,\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$；

$(BR_0P8)a\rightarrow b\geqslant\neg a\vee b$；

$(BR_0P9)a\vee b\rightarrow c=(a\rightarrow c)\wedge(b\rightarrow c)$，

$a\wedge b\rightarrow c=(a\rightarrow c)\vee(b\rightarrow c)$；

(BR_0P10)在区间$[0,1]$上定义一元运算$\neg$和二元运算$\vee,\rightarrow$分别为

$$\neg a=1-a,$$

$$a\vee b=\max\{a,b\},$$

$$a\rightarrow b=\begin{cases}1,a\leqslant b,\\\neg a\vee b,a>b,\end{cases}$$

则$[0,1]$成为BR_0-代数，称为BR_0-单位区间。

定义 2[6]　由以下的公式集$F(S)$，公理BL^*1~BL^*9以及MP规则组成的系统称为BL^*系统。

1）设$S=\{q_1,q_2,\cdots\}$是无穷集，$F(S)$是由S生成的$(\neg,\vee,\rightarrow)$型自由代数，$F(S)$中的元素叫公式，S中的元素叫原子公式。

2）$F(S)$中具有以下各种形式的公式为BL^*系统中的公理：

$(BL^*1)A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$；

$(BL^*2)(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$；

$(BL^*3)\big(A\rightarrow(B\rightarrow C)\big)\rightarrow\big(B\rightarrow(A\rightarrow C)\big)$；

$(BL^*4)(B\rightarrow C)\rightarrow\big((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\big)$；

$(BL^*5)A\rightarrow\neg\neg A$；

$(BL^*6)A\rightarrow A\vee B$；

$(BL^*7)A\vee B\rightarrow B\vee A$；

$(BL^*8)(A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C)$；

$(BL^*9)(A\wedge B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C)\vee(B\rightarrow C)$。

3）BL^*系统中的推理规则是由$A,A\rightarrow B$推得B，简称为MP规则。

定义 3[17]　设$A=A(q_1,q_2,\cdots,q_m)\in F(S)$是含有$m$个原子公式$q_1,q_2,\cdots,q_m$的命题公式，$[0,1]$为赋值域，分别用$[0,1]$中的数$x_1,x_2,\cdots,x_m$取代$A=A(q_1,q_2,\cdots,q_m)$中的$q_1,q_2,\cdots,q_m$，并且把$A$中的逻辑联结词$\neg,\vee,\rightarrow$分别换成$[0,1]$中的运算$\neg,\vee,\rightarrow$，则得一$m$元函数$f_A(x_1,x_2,\cdots,x_m):[0,1]^m\rightarrow[0,1]$，称$f_A$为公式$A$诱导的真值函数。$\forall\chi=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in[0,1]^m$，称$f_A(\chi)$为$A=A(q_1,q_2,\cdots,q_m)$的一个赋值。

定义 4[17]　设$p=\{p_1(x),p_2(x),\cdots,p_m(x),\cdots\}$为$[0,1]$上的函数序列，且$p_i(x)(i=1,2,\cdots)$为赋值概率密度函数，即$p_i(x)\geqslant 0$，满足$\int_0^1 p_i(x)\mathrm{d}x=1$，称$p$为赋值概率密度函数序列，简称为概率密度函数序列。全体赋值概率密度函数序列的集合记为P。

定义5[17] 设p为概率密度函数序列,$A=A(q_1,q_2,\cdots,q_m)\in F(S)$,$f_A$为公式$A$诱导的真值函数,定义$m$重积分为

$$\tau_p(A)=\int_{[0,1]^m} f_A(x_1,x_2,\cdots,x_m)p_1(x_1)p_2(x_2)\cdots p_m(x_m)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m。$$

若这个积分存在,则称这个积分值$\tau_p(A)$为命题公式A的p-随机真度,简称为随机真度。

命题1[17] 设p为概率密度函数序列,$\forall\chi=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in[0,1]^m$,$\varphi(\chi)>0$,且$\int_0^1\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi=1$,对任意的$[0,1]$上的赋值概率密度函数序列成立。为了方便,记$\varphi(\chi)=p_1(x_1)\times p_2(x_2)\times\cdots\times p_m(x_m)$,$\mathrm{d}\chi=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m$,则$\tau_p(A)=\int_{[0,1]^m} f_A(\chi)\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi$。

命题2[9] 设Γ是一理论,即$\Gamma\subset F(S)$,$A,B\in F(S)$,若$\Gamma\cup\{A\}\vdash B$,则$\Gamma\vdash A\to B$。

命题3[17] 设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,则

1)若$\vdash A\to B$,则$\tau_p(A)\leqslant\tau_p(B)$;

2)$\tau_p(A\vee B)=\tau_p(A)+\tau_p(B)-\tau_p(A\wedge B)$;

3)若$A\approx B$,则$\tau_p(A)=\tau_p(B)$;

4)$\tau_p(\neg A)=1-\tau_p(A)$。

2 条件随机真度与有效推理

定义6 设p为概率密度函数序列,$A\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$为条件集,$\otimes\Pi^2=A_1{}^2\otimes A_2{}^2\otimes\cdots A_n{}^2$,设$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,令

$$\tau_p(A|\Pi)=\frac{\tau_p(A\otimes(\otimes\Pi^2))}{\tau_p(\otimes\Pi^2)},$$

则称$\tau_p(A|\Pi)$为公式A在条件Π下的条件随机真度,简称为p-条件随机真度。

注1 1)若Π全由定理组成,则$\otimes\Pi^2$是重言式,此时$\tau_p(A|\Pi)=\tau_p(A)$;

2)若Π只含有一个公式B,则

$$\tau_p(A|B)=\frac{\tau_p(A\otimes B^2)}{\tau_p(B^2)}。$$

定理1 设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\otimes\Pi^2=A_1^2\otimes A_2^2\otimes\cdots A_n^2$,设$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,则

1)$0\leqslant\tau_p(A|\Pi)\leqslant 1$;

2)若A是重言式,则$\tau_p(A|\Pi)=1$;

3)$\tau_p(A\vee B|\Pi)=\tau_p(A|\Pi)+\tau_p(B|\Pi)-\tau_p(A\wedge B|\Pi)$。

证明 1)因为$\vdash A\otimes(\otimes\Pi^2)\to(\otimes\Pi^2)$,所以由命题3的1)可知$\tau_p(A\otimes(\otimes\Pi^2))\leqslant\tau_p(\otimes\Pi^2)$,又因为$\tau_p(A\otimes(\otimes\Pi^2))\geqslant 0$,所以$0\leqslant\tau_p(A|\Pi)\leqslant 1$。

2)若A是重言式,则$\tau_p(A\otimes(\otimes\Pi^2))=\tau_p(\otimes\Pi^2)$,所以由定义6可知

$$\tau_p(A|\Pi)=\frac{\tau_p(A\otimes(\otimes\Pi^2))}{\tau_p(\otimes\Pi^2)}=1。$$

3)由命题3的2)可得

$$\tau_p((A\otimes(\otimes\Pi^2))\vee(B\otimes(\otimes\Pi^2)))=\tau_p(A\otimes(\otimes\Pi^2))+\tau_p(B\otimes(\otimes\Pi^2))-\tau_p((A\otimes(\otimes\Pi^2))\wedge(B\otimes(\otimes\Pi^2))),$$

因为$\tau_p((A\vee B)\otimes(\otimes\Pi^2))=\tau_p((A\otimes(\otimes\Pi^2))\vee(B\otimes(\otimes\Pi^2)))$,

所以上式两边同时除以$\tau_p(\otimes\Pi^2)$可得

$$\tau_p(A\vee B|\Pi)=\tau_p(A|\Pi)+\tau_p(B|\Pi)-\tau_p(A\wedge B|\Pi)。$$

定理2 设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\otimes\Pi^2=A_1^2\otimes A_2^2\otimes\cdots A_n^2$,设$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,则

1)若$\Pi\vdash A$,则$\tau_p(A|\Pi)=1$;

2)若$\Pi\cup\{B\}\vdash A$,则$\tau_p(B|\Pi)\leqslant\tau_p(A|\Pi)$。

证明 1)若$\Pi\vdash A$,则$\vdash(\otimes\Pi^2)\to A$,所以$\vdash(\otimes\Pi^2)\to(A\otimes(\otimes\Pi^2))$,

从而有$\tau_p(\otimes\Pi^2)\leqslant\tau_p(A\otimes(\otimes\Pi^2))$,

所以$\tau_p(A|\Pi)=\frac{\tau_p(A\otimes\Pi^2)}{\tau_p(\Pi^2)}\geqslant 1$。

又因为$\tau_p(A|\Pi)\leqslant 1$,所以$\tau_p(A|\Pi)=1$。

2)若$\Pi\cup\{B\}\vdash A$,则由命题2可得

$\vdash(B\otimes(\otimes\Pi^2))\to A$,

从而$\vdash(B\otimes(\otimes\Pi^2))\to[A\otimes\otimes\Pi 2]$,

所以由命题3的1)可得

$\tau_p(B\otimes(\otimes\Pi^2))\leqslant\tau_p(A\otimes(\otimes\Pi^2))$,

所以$\tau_p(B|\Pi)\leqslant\tau_p(A|\Pi)$。

定义7 设p为概率密度函数序列,$A\in F(S)$,

$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S),\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$，令

$U_p(A|\Pi)=1-\tau_p(A|\Pi)$，

则称$U_p(A|\Pi)$为公式A在条件Π下的条件随机不可靠度，简称为p-条件随机不可靠度。

定理3　设p为概率密度函数序列，$A,B\in F(S)$，$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$，$\otimes\Pi^2=A_1^2\otimes A_2^2\otimes\cdots A_n^2$，设$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$，则

1)若$A\approx B$，则$\tau_p(A|\Pi)=\tau_p(B|\Pi)$；

2)$\tau_p(\neg A|\Pi)=U_p(A|\Pi)$；

3)$\tau_p(A\to B|\Pi)=\tau_p(A\wedge B|\Pi)-\tau_p(A|\Pi)+1$。

证明　1)若$A\approx B$，则$(A\to B)\wedge(B\to A)$是重言式，所以A为真当且仅当B为真，所以

$\tau_p(A|\Pi)=\tau_p(B|\Pi)$。

2)因为

$$\tau_p(\otimes\Pi^2)=\tau_p\big((A\vee\neg A)\otimes(\otimes\Pi^2)\big)=\tau_p\big(A\otimes(\otimes\Pi^2)\big)+\tau_p\big(\neg A\otimes(\otimes\Pi^2)\big)-\tau_p\big((A\wedge\neg A)\otimes(\otimes\Pi^2)\big),$$

且$\tau_p\big((A\wedge\neg A)\otimes(\otimes\Pi^2)\big)=0$，所以

$\tau_p(\otimes\Pi)=\tau_p\big(A\otimes(\otimes\Pi^2)\big)+\tau_p\big(\neg A\otimes(\otimes\Pi^2)\big)$。

上式两边同时除以$\tau_p(\otimes\Pi^2)$可得

$1=\tau_p(A|\Pi)+\tau_p(\neg A|\Pi)$，

所以$\tau_p(\neg A|\Pi)=1-\tau_p(A|\Pi)=U_p(A|\Pi)$。

3)由定理1的3)和定理3的2)可得

$$\tau_p(A\to B|\Pi)=\tau_p(\neg A\vee B|\Pi)=\tau_p(\neg A|\Pi)+\tau_p(B|\Pi)-\tau_p(\neg A\wedge B|\Pi)=1-\tau_p(A|\Pi)+\tau_p(A\wedge B|\Pi)=\tau_p(A\wedge B|\Pi)-\tau_p(A|\Pi)+1。$$

定义8　设$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$为条件集，$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$，$\Sigma=\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}\subset F(S)$为推理的前提命题公式的集合，$\{B\}\subset F(S)$，若$\vdash(\otimes\Sigma^2\otimes\otimes\Pi^2)\to B$，则称“$\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}\therefore_{\Pi}B$”为条件集$\Pi$下的条件有效推理，称$q_1,q_2,\cdots,q_m$为该条件推理的前提，称$B$为该条件推理的结论。

定义9　设“$\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}\therefore_{\Pi}B$”为条件集$\Pi$下的条件有效推理，$\Sigma=\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$，若$E\subset\Sigma$，且$\Sigma-E$不能在条件$\Pi$下推出$B$，即$\vdash\Big(\otimes(\Sigma-E)^2\otimes\otimes\Pi^2\Big)\to B$不成立，则称$E$为条件$\Pi$下的必要前提集。取$\Sigma$中的任意命题公式$q_i$，用$\delta(q_i|\Pi)$表示$\Sigma=\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$中包含$q_i$的个数最少的必要前提集所含命题公式的个数，显然$\delta(q_i|\Pi)\geqslant 1$，令

$$e(q_i|\Pi)=\frac{1}{\delta(q_i|\Pi)},$$

则称$e(q_i|\Pi)$为公式q_i在条件Π下的条件必要度。显然，条件必要度的取值范围为$(0,1]$，取值越大，表明该前提在条件有效推理中越不可缺少。

定理4　设p为概率密度函数序列，$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$，“$\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}\therefore_{\Pi}B$”为条件集$\Pi$下的条件有效推理，则

$$\tau_p(B|\Pi)\geqslant\sum_{k=1}^{m}e(q_k|\Pi)\tau_p(q_k|\Pi)-\sum_{k=1}^{m}e(q_k|\Pi)+1。$$

证明　设“$\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}\therefore_{\Pi}B$”为条件集$\Pi$下的条件有效推理，设$q_1,q_2,\cdots,q_m,B$含有$m_0$个相同的原子公式$C_1,C_2,\cdots,C_{m_0}$，则由命题逻辑的语义知$q_1\wedge q_2\wedge\cdots\wedge q_m\to B$是重言式，所以

$\forall\chi=(x_1,x_2,\cdots,x_{m_0})\in[0,1]^{m_0}$，有

$f_{q_1}(\chi)\wedge f_{q_2}(\chi)\wedge\cdots\wedge f_{q_m}(\chi)\leqslant f_B(\chi)$。

在序列$\{f_{q_1}(\chi),f_{q_2}(\chi),\cdots,f_{q_m}(\chi)\}$中，取极小下标集$K=\{k_1,k_2,\cdots,k_s\}$，使得$f_{q_{k_i}}(\chi)\leqslant f_B(\chi)$，$(i=1,2,\cdots,s)$，且$f_{q_j}(\chi)>f_B(\chi)$，$(j\notin K)$。由定义9知，$E=\{q_{k_1},q_{k_2},\cdots,q_{k_s}\}$是条件必要前提集，因此包含$q_{k_i}$的极小条件必要前提集的个数$\delta(q_{k_i}|\Pi)\leqslant s$，从而

$$e(q_{k_i}|\Pi)=\frac{1}{\delta(q_{k_i}|\Pi)}\geqslant\frac{1}{s},\ (i=1,2,\cdots,s)。$$

因为$\forall\chi=(x_1,x_2,\cdots,x_{m_0})\in[0,1]^{m_0}$，$f_{q_{k_i}}(\chi)\leqslant f_B(\chi)$，所以$1-f_B(\chi)\leqslant 1-f_{q_{k_i}}(\chi)$，所以

$\big(1-f_{q_{k_i}}(\chi)\big)\wedge\big(1-f_B(\chi)\big)=1-f_B(\chi)$。

又因为$1-f_B(\chi)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\big(1-f_B(\chi)\big)$，所以

$$1-f_B(\chi)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\big(1-f_B(\chi)\big)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\Big[\big(1-f_{q_{k_i}}(\chi)\big)\wedge\big(1-f_B(\chi)\big)\Big]\leqslant\sum_{i=1}^{s}e(q_{k_i}|\Pi)\Big[\big(1-f_{q_{k_i}}(\chi)\big)\wedge\big(1-f_B(\chi)\big)\Big]。$$

由于$f_{q_j}(\chi)>f_B(\chi)$，$(j\notin K)$，所以

$\left(1-f_{q_j}(\chi)\right)\wedge\left(1-f_B(\chi)\right)=\left(1-f_{q_j}(\chi)\right)\geqslant 0$,所以

$1-f_B(\chi)\leqslant$

$$\sum_{k=1}^{m}e(q_k|\Pi)\left[\left(1-f_{q_k}(\chi)\right)\wedge\left(1-f_B(\chi)\right)\right]。$$

上式两边同时乘以$\varphi(\chi)$,并在$[0,1]^m$上积分可得

$$\int_{[0,1]^m}\left(1-f_B(\chi)\right)\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{m}e(q_k|\Pi)\int_{[0,1]^m}\left[\left(1-f_{q_k}(\chi)\right)\wedge\left(1-f_B(\chi)\right)\right]\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi。$$

因为$\left(1-f_{q_k}(\chi)\right)\wedge\left(1-f_B(\chi)\right)\leqslant\left(1-f_{q_k}(\chi)\right)$,所以由定义5和定义6可得

$$1-\tau_p(B|\Pi)\leqslant\sum_{k=1}^{m}e(q_k|\Pi)\left(1-\tau_p(q_k|\Pi)\right)。$$

整理上式可得

$$\tau_p(B|\Pi)\geqslant\sum_{k=1}^{m}e(q_k|\Pi)\tau_p(q_k|\Pi)-\sum_{k=1}^{m}e(q_k|\Pi)+1。$$

引理1 对任意$a,b,c\in[0,1]$,有$c+b\otimes c\geqslant a\otimes[c+a\rightarrow b\otimes c]$成立。

证明 若$a\leqslant b$,则$a\rightarrow b=1$,从而有$c+b\otimes c\geqslant a\otimes c+1\otimes c$;若$a>b$,则$a\rightarrow b=b$,又因为$a\otimes c\leqslant c$,所以$c+b\otimes c\geqslant a\otimes c+b\otimes c$。即$c+b\otimes c\geqslant a\otimes c+(a\rightarrow b)\otimes c$。

定理5(条件随机真度推理规则) 设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\otimes\Pi^2=A_1^2\otimes A_2^2\otimes\cdots A_n^2$,设$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,则1)(MP规则)若$\tau_p(A|\Pi)\geqslant\alpha,\tau_p(A\rightarrow B|\Pi)\geqslant\beta$,则$\tau_p(B|\Pi)\geqslant\alpha+\beta-1$;

2)(HS规则)若$\tau_p(A\rightarrow B|\Pi)\geqslant\alpha,\tau_p(B\rightarrow C|\Pi)\geqslant\beta$,则$\tau_p(A\rightarrow C|\Pi)\geqslant\alpha+\beta-1$。

证明 1)由已知条件及定义6可得

$\tau_p\left(A\otimes(\otimes\Pi^2)\right)\geqslant[\alpha\tau p\otimes\Pi 2]$,

$\tau_p\left((A\rightarrow B)\otimes(\otimes\Pi^2)\right)\geqslant\beta\tau_p(\otimes\Pi^2)$。

由命题1和引理1可得

$$\tau_p(\otimes\Pi^2)+\tau_p\left(B\otimes(\otimes\Pi^2)\right)=\int_{[0,1]^m}f_{\otimes\Pi^2}(\chi)\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi+\int_{[0,1]^m}f_{B\otimes(\otimes\Pi^2)}(\chi)\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi=$$

$$\int_{[0,1]^m}\left(f_{\otimes\Pi^2}(\chi)+f_{B\otimes(\otimes\Pi^2)}(\chi)\right)\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi\geqslant\int_{[0,1]^m}\left(f_{A\otimes(\otimes\Pi^2)}(\chi)+f_{(A\rightarrow B)\otimes(\otimes\Pi^2)}(\chi)\right)\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi=$$

$$\int_{[0,1]^m}f_{A\otimes(\otimes\Pi^2)}(\chi)\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi+\int_{[0,1]^m}f_{(A\rightarrow B)\otimes(\otimes\Pi^2)}(\chi)\varphi(\chi)\mathrm{d}\chi=$$

$\tau_p\left(A\otimes(\otimes\Pi^2)\right)+\tau_p\left((A\rightarrow B)\otimes(\otimes\Pi^2)\right)\geqslant$

$\alpha\tau_p(\otimes\Pi^2)+\beta\tau_p(\otimes\Pi^2)=$

$(\alpha+\beta)\tau_p(\otimes\Pi^2)$。

上式两边同时除以$\tau_p(\otimes\Pi^2)$可得

$\tau_p(B|\Pi)\geqslant\alpha+\beta-1$。

2)因为$\Pi\vdash(B\rightarrow C)\rightarrow\left((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\right)$,所以由定理2的1)可得

$\tau_p\left((B\rightarrow C)\rightarrow\left((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\right)|\Pi\right)=1$,

由定理5的1)可得

$\tau_p\left(\left((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\right)|\Pi\right)\geqslant$

$\tau_p\left((B\rightarrow C)|\Pi\right)+\tau_p\left((B\rightarrow C)\rightarrow\left((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\right)|\Pi\right)-1=$

$\tau_p\left((B\rightarrow C)|\Pi\right)$,

再由定理5的1)可得

$\tau_p\left((A\rightarrow C)|\Pi\right)\geqslant\tau_p\left((A\rightarrow B)|\Pi\right)+$

$\tau_p\left(\left((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\right)|\Pi\right)-1\geqslant$

$\tau_p\left((A\rightarrow B)|\Pi\right)-1+\tau_p\left((B\rightarrow C)|\Pi\right)=$

$\alpha+\beta-1$。

3 条件随机逻辑度量空间

定义10 设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,令

$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p\left((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)|\Pi\right)$,

则称$\xi_p(A,B|\Pi)$为条件Π下公式A与B的条件随机相似度,简称为p-条件随机相似度。

定理6 设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,则

1)$\xi_p(A,B|\Pi)=\xi_p(B,A|\Pi)$;

2)$A\approx B$,当且仅当$\xi_p(A,B|\Pi)=1$;

3)$A\approx\neg B$,当且仅当$\xi_p(A,B|\Pi)=0$。

证明　1)由定义10可知

$$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A)|\Pi)=\tau_p((B\to A)\wedge(A\to B)|\Pi)=\xi_p(B,A|\Pi)。$$

2)若$A\approx B$,则$A\to B$与$B\to A$是重言式,所以$(A\to B)\wedge(B\to A)$是重言式。由定理2的1)知

$$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A)|\Pi)=1。$$

反之,若$\xi_p(A,B|\Pi)=1$,则

$$\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A)|\Pi)=1。$$

由定理2的1)知$(A\to B)\wedge(B\to A)$是重言式,所以$A\approx B$。

3)若$A\approx\neg B$,则$A\to\neg B$与$\neg B\to A$是重言式,所以$(A\to\neg B)\wedge(\neg B\to A)$是重言式,所以$\neg((A\to B)\wedge(B\to A))$是重言式。所以

$$\tau_p((A\to\neg B)\wedge(\neg B\to A)|\Pi)=\tau_p(\neg((A\to B)\wedge(B\to A))|\Pi)=1。$$

又由定理3的2)可得

$$\tau_p(\neg((A\to B)\wedge(B\to A))|\Pi)=1-\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A))|\Pi)=1,$$

从而$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A)|\Pi)=0$。

反之,若$\xi_p(A,B|\Pi)=0$,则

$\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A)|\Pi)=0$,所以

$$\tau_p(\neg((A\to B)\wedge(B\to A))|\Pi)=1-\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A))|\Pi)=1。$$

由定理2的1)知$\neg((A\to B)\wedge(B\to A))$是重言式,即$(A\to\neg B)\wedge(\neg B\to A)$是重言式,所以$A\approx\neg B$。

定理7　设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,则

$$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to A|\Pi)-1=1-\tau_p((A\vee B)|\Pi)+\tau_p((A\wedge B)|\Pi)。$$

证明　由定义10和定理1的3)可得

$$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A)|\Pi)=\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to A|\Pi)-\tau_p((A\to B)\vee(B\to A)|\Pi)。$$

因为$(A\to B)\vee(B\to A)$是重言式,所以由定理2的1)可得

$$\tau_p((A\to B)\vee(B\to A)|\Pi)=1,$$

故$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to A|\Pi)-1$。

由以上结论及定理3的3)可得

$$\begin{aligned}\xi_p(A,B|\Pi)&=\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to A|\Pi)-1=\\&\tau_p(A\wedge B|\Pi)-\tau_p(A|\Pi)+1+\\&\tau_p(B\wedge A|\Pi)-\tau_p(B|\Pi)+1-1=\\&2\tau_p(A\wedge B|\Pi)-\tau_p(A|\Pi)-\tau_p(B|\Pi)+1=\\&\tau_p(A\wedge B|\Pi)+\tau_p(A|\Pi)+\tau_p(B|\Pi)-\\&\tau_p(A\vee B|\Pi)-\tau_p(A|\Pi)-\tau_p(B|\Pi)+1=\\&1-\tau_p(A\vee B|\Pi)+\tau_p(A\wedge B|\Pi)。\end{aligned}$$

综上可得

$$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to A|\Pi)-1=1-\tau_p((A\vee B)|\Pi)+\tau_p((A\wedge B)|\Pi)。$$

定理8　设p为概率密度函数序列,$A,B,C\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,则

$$\xi_p(A,B|\Pi)+\xi_p(B,C|\Pi)\leqslant 1+\xi_p(A,C|\Pi)。$$

证明　若$A,B,C\in F(S)$,则由定理7可得$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to A|\Pi)-1$,于是

$$\begin{aligned}\xi_p(A,B|\Pi)+\xi_p(B,C|\Pi)&=\\&\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to A|\Pi)-1+\\&\tau_p(B\to C|\Pi)+\tau_p(C\to B|\Pi)-1=\\&\left[\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to C|\Pi)-1\right]+\\&\left[\tau_p(C\to B|\Pi)+\tau_p(B\to A|\Pi)-1\right]。\end{aligned}$$

由定理5的2)可得

$$\begin{aligned}&\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to C|\Pi)-1\leqslant\\&\tau_p(A\to C|\Pi),\tau_p(C\to B|\Pi)+\\&\tau_p(B\to A|\Pi)-1\leqslant\tau_p(C\to A|\Pi)。\end{aligned}$$

所以结合定理7可得

$$\begin{aligned}\xi_p(A,B|\Pi)+\xi_p(B,C|\Pi)&=\\&\left[\tau_p(A\to B|\Pi)+\tau_p(B\to C|\Pi)-1\right]+\\&\left[\tau_p(C\to B|\Pi)+\tau_p(B\to A|\Pi)-1\right]\leqslant\\&\tau_p(A\to C|\Pi)+\tau_p(C\to A|\Pi)=\\&\xi_p(A,C|\Pi)+1,\end{aligned}$$

即$\xi_p(A,B|\Pi)+\xi_p(B,C|\Pi)\leqslant 1+\xi_p(A,C|\Pi)$。

定义11　设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,令

$$d_p(A,B|\Pi)=1-\xi_p(A,B|\Pi),$$

则称$d_p(A,B|\Pi)$为条件Π下公式A与B的条件随机伪距离,简称为p-条件随机伪距离。

定理9 设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,则

1)$d_p(A,B|\Pi)=2-\tau_p(A\to B|\Pi)-\tau_p(B\to A|\Pi)$;

2)$d_p(\neg A,\neg B|\Pi)=d_p(A\wedge B,A\vee B|\Pi)=d_p(A,B|\Pi)$。

证明 1)由定义10可得

$$\xi_p(A,B|\Pi)=\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A)|\Pi),$$

再由定义11可得$d_p(A,B|\Pi)=1-\xi_p(A,B|\Pi)$,

所以$d_p(A,B|\Pi)=1-\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A)|\Pi)=1-\tau_p(A\to B|\Pi)-\tau_p(B\to A|\Pi)+\tau_p((A\to B)\vee(B\to A)|\Pi)=2-\tau_p(A\to B|\Pi)-\tau_p(B\to A|\Pi)$。

2)由定理9的1)可得

$$d_p(\neg A,\neg B|\Pi)=2-\tau_p(\neg A\to\neg B|\Pi)-\tau_p(\neg B\to\neg A|\Pi)=2-\tau_p(B\to A|\Pi)-\tau_p(A\to B|\Pi)=d_p(A,B|\Pi),$$

$$d_p(A\wedge B,A\vee B|\Pi)=2-\tau_p(A\wedge B\to A\vee B|\Pi)-\tau_p(A\vee B\to A\wedge B|\Pi)=2-\tau_p((A\to A)\wedge(A\to B)\wedge(B\to A)\wedge(B\to B)|\Pi)-\tau_p((A\to A)\vee(A\to B)\vee(B\to A)\vee(B\to B)|\Pi)=1-\tau_p((A\to B)\wedge(B\to A)|\Pi)=d_p(A,B|\Pi),$$

所以$d_p(\neg A,\neg B|\Pi)=d_p(A\wedge B,A\vee B|\Pi)=d_p(A,B|\Pi)$。

定义12 设p为概率密度函数序列,$A,B\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$d_p$是$F(S)$上公式间的条件随机伪距离,则称$(F(S),d_p)$为条件随机逻辑度量空间。

定理10 设p为概率密度函数序列,$A,B,C,D\in F(S)$,$\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset F(S)$,$\tau_p(\otimes\Pi^2)>0$,则在条件随机逻辑度量空间$(F(S),d_p)$中,逻辑运算$\wedge,\vee,\to$关于$d_p(A,B|\Pi)$都是连续的。

证明 由定义11和定理8可得

$$d_p(A\vee C,B\vee D|\Pi)=1-\xi_p(A\vee C,B\vee D|\Pi)\leqslant 1-\xi_p(A\vee C,B\vee C|\Pi)-\xi_p(B\vee C,B\vee D|\Pi)+1\leqslant 1-\xi_p(A,B|\Pi)-\xi_p(C,D|\Pi)+1=d_p(A,B|\Pi)+d_p(C,D|\Pi)。$$

同理可得

$$d_p(A\wedge C,B\wedge D|\Pi)\leqslant d_p(A,B|\Pi)+d_p(C,D|\Pi),$$

$$d_p(A\to C,B\to D|\Pi)\leqslant d_p(A,B|\Pi)+d_p(C,D|\Pi)。$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}d_p(A_n,A|\Pi)=\lim\limits_{n\to\infty}d_p(B_n,B|\Pi)=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}d_p(A_n\wedge B_n,A\wedge B|\Pi)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}d_p(A_n\vee B_n,A\vee B|\Pi)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}d_p(A_n\to B_n,A\to B|\Pi)=0。$$

所以逻辑运算$\wedge,\vee,\to$关于$d_p(A,B|\Pi)$都是连续的。

4 结束语

本文基于BR_0-代数语义,在赋值域为[0,1]的模糊命题逻辑系统中提出了命题公式的条件随机真度、条件随机不可靠度、条件有效推理和条件必要度的概念,建立了条件随机逻辑度量空间。这些研究在面对具有随机性和前提约束的不确定信息时,可以量化命题在特定条件下的真实程度,更精准地处理模糊或随机的输入信息,使得计量逻辑学在随机化方向有了突破。在今后的研究中,将对命题逻辑系统BL^*的条件随机发散度和近似推理做进一步的讨论。

参考文献:

[1]KOLMOGOROV N. The foundation of probability[M]. New York:Chelsea Publishing Company,1950.

[2]ADAMS E W. A primer of probability logic[M]. Stanford:CSLI Pulications,1998.

[3]王国俊,傅丽,宋建社.二值命题逻辑中命题的真度理论[J].中国科学(数学),2001,31(11):998-1008.

[4]WANG G J, LEUNG Y. Integrated semantics and logic metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems,2003,136(1):71-91.

[5]李骏,黎锁平,夏亚峰. Lukasiewicz*n*值命题逻辑中命题的真度理论[J].数学学报,2004,47(4):769-780.

[6]吴洪博.基础R_0-代数与基础L^*系统[J].数学进展,2003,32(5):565-576.

[7]张琼,吴洪博.BL^*系统的一种扩张及相关性质[J].计算机工程与应用,2010,46(19):36-38.

[8]王国俊.计量逻辑学(Ⅰ)[J].工程数学学报,2006,23(2):191-215.

[9]王国俊.数理逻辑引论与归结原理[M].北京:科学出版社,2006.

[10]惠小静，王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用[J]. 中国科学(信息科学)，2007，37(6)：801-812.
[11]周红军，王国俊. Borel 型概率计量逻辑[J]. 中国科学(信息科学)，2011，41(11)：1328-1342.
[12]折延宏，贺晓丽. 粗糙逻辑中公式的Borel型概率粗糙真度[J]. 软件学报，2014，25(5)：970-983.
[13]惠小静. 基于真值的SBL~公理化扩张系统的计量化[J]. 中国科学(信息科学)，2014，44(7)：900-912.
[14]李骏，王菊花. 二值命题逻辑中逻辑理论的计量化及应用[J]. 计算机工程与应用，2014，50(24)：42-46.
[15]周红军. 基于n-值Lukasiewicz命题逻辑的概率计量化推理系统[J]. 模式识别与人工智能，2013，26(6)：521-528.
[16]吴霞，张家录. Gödel n值命题逻辑系统中公式的随机真度和形式推演结论的不可靠度估计[J]. 模糊系统与数学，2012，26(3)：24-34.
[17]何银，惠小静，彭晨雪. 基于BR_0代数语义的模糊命题逻辑系统的随机发散度与近似推理[J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2025，61(2)：85-90.
[18]李修清，李燕. 模糊命题逻辑系统的计量化[J]. 模糊系统与数学，2016，30(4)：68-75.
[19]吴霞，张家录. 随机模糊环境下的命题逻辑真度理论[J]. 模式识别与人工智能，2017，30(4)：289-301.
[20]李顺琴. 三值乘积逻辑系统中公式关于有限理论的Σ_Γ—真度理论[J]. 模糊系统与数学，2022，36(2)：1-5.
[21]南宁，金明慧，惠小静. n值乘积命题逻辑系统的真度研究[J]. 延安大学学报(自然科学版)，2021，40(1)：61-64.
[22]韩邦合，王国俊. 二值逻辑中命题的条件真度理论[J]. 模糊系统与数学，2007，21(4)：9-15.
[23]娄妍，冯飞，左卫兵. Lukasiewicz n -值命题逻辑中公式的条件随机真度[J]. 计算机工程与应用，2012，48(33)：63-67.
[24]许倩，惠小静，南琼. n值R_0命题逻辑系统中公式的条件随机真度[J]. 湖北大学学报(自然科学版)，2024，46(1)：133-140.
[25]WANG B，HUI X J. Theory of Δ conditional randomized truth degree in Gödel n-valued propositional logic system of adding Δ operator [J]. ScienceAsia，2024，50(2)：1-6.

[责任编辑　毕　伟]

Research on graded and valid inference based on BR_0 algebraic

HE Yin，HUI Xiaojing*，PENG Chenxue

(College of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an 716000，China)

Abstract：This paper studies the theory of conditional randomized truth degree in fuzzy propositional logic system，deduces its properties and proves the continuity of logical operations. Firstly，based on BR_0-algebraic semantics，the p-conditional randomized truth degree of formulas is proposed in fuzzy propositional logic systems. The basic characteristics and operational properties of the p-conditional randomized truth degree are demonstrated，and the p-conditional randomized unreliability degree is introduced. Secondly，the concepts of conditional valid inference and conditional necessity degree are presented，and the inference properties satisfied by the p-conditional randomized truth degree are proved based on the MP rule and HS rule. Finally，the p-conditional randomized similarity degree and p-conditional randomized pseudo-metric between formulas are proposed，along with their operational and inequality properties. On this basis，the p-conditional randomized logical metric space is established，the continuity of logical operators is proved，the basic framework for the quantitative research on conditional randomized truth degree in this propositional system is formed. The research results complete the quantitative theory system of conditional random truth degree in the fuzzy propositional logic systems.

Key words：p-conditional randomized truth degree；p-conditional random unreliability；p-conditional random pseudo-metric；p-conditional random logic metric space