

文章编号:1671-5896(2026)04-0756-09

基于信息保真度的通信系统信息恢复性能界限

马卓

(吉林省军区 数据信息室, 长春 130033)

摘要: 针对通信系统信号传输过程中先验信息损失导致性能评估失真的问题, 提出一种基于信息保真度的信息恢复性能界限评估方法。在实际通信环境中, 由于信道噪声和系统非理想性, 接收端通常无法获取完整的发送端先验信息, 其使传统基于 Fisher 信息的 Cramér-Rao 界限适用性受到限制。通过引入信息保真度及其矩母函数, 建立了噪声-信号比(NSR: Noise-to-Signal Ratio)与 Fisher 信息、保真度信息间的下界不等式关系, 并构造了新的噪声比下界估计模型, 为通信系统的信息恢复性能提供了更为稳健的理论界限。理论分析和两个数值算例(包括二进制通信系统与多模信号传输信道)表明, 相比经典的 Fisher 信息界限, 基于信息保真度的界限虽然更为宽松, 但在先验信息不完整、小样本等实际通信场景中具有更强的稳健性和实用性, 并为通信系统性能评估提供了新的理论工具。

关键词: 通信系统; 信息保真度; 信息恢复; 性能界限; Fisher 信息; Cramér-Rao 不等式

中图分类号: TN911

文献标志码: A

Information Fidelity-Based Performance Bounds for Information Recovery in Communication Systems

MA Zhuo

(Department of Data and Information, Jilin Military Area Command, Changchun 130033, China)

Abstract: To address the performance distortion caused by a priori information loss in signal transmission processes of communication systems, an information fidelity-based performance bounds evaluation method is proposed for information recovery. In practical communication environments, due to channel noise and system non-ideality, the receiver often can not obtain a complete priori information from the transmitter, which limits the applicability of traditional Fisher-information-based Cramér-Rao bounds under such conditions. By introducing the concept of information fidelity and its moment generating function, an inequality relating the noise-to-signal ratio, the Fisher information, and the fidelity information is established, and a new lower-bound estimation model for NSR (Noise-to-Signal Ratio) is derived, providing more robust theoretical bounds for information recovery performance in communication systems. Theoretical analysis and two numerical examples (including a binary communication system and a multimode signal transmission channel) demonstrate that, compared with classical Fisher-information-based bounds, the information-fidelity-based bounds, while more relaxed, exhibit stronger robustness and practicality in realistic scenarios with incomplete a priori information, and small sample sizes, offering a new theoretical tool for communication system performance evaluation.

Key words: communication systems; information fidelity; information recovery; performance bounds; Fisher information; Cramér-Rao inequality

收稿日期: 2025-08-12

作者简介: 马卓(1982—), 女, 吉林四平人, 吉林省军区工程师, 主要从事通信设备管理研究, (Tel) 86-13578690788 (E-mail) musicfanshall@126.com。

0 引言

在现代通信系统中，由于信号在传输过程中不可避免地受到信道噪声、干扰和系统非理想性的影响，导致接收端信号质量下降，信息恢复精度受限。因此准确评估和优化通信系统的信息恢复性能是通信工程领域的核心问题之一。

在数字通信系统中，发送端信号的统计特性通常蕴含着重要的系统信息。例如，在多载波通信系统中，子载波幅度的分布特性反映了信道的频率选择性衰落特征^[1-3]；在无线传感器网络(WSN: Wireless Sensor Network)中，传感数据的先验分布体现了环境参数的时空变化规律^[4-6]；在认知无线电系统(CRS: Conitive Radio System)中，主用户信号的功率分布特性是频谱感知和动态频谱接入的关键信息^[7-9]。然而，由于信道衰落、多径传播和电磁干扰等因素^[10-11]，会使这些先验分布信息在传输过程中遭到严重污染，给接收端的信号检测、参数估计和信息解码带来挑战^[12-13]。

传统的通信系统性能分析基于 Fisher 信息理论框架，通过 Cramér-Rao 不等式给出参数估计方差或噪信比(NSR: Noise-to-Signal Ratio)的理论下界，从而评估系统的信息恢复能力^[14-19]。然而，这一经典方法在实际通信环境中存在两个关键局限：首先 Fisher 信息刻画的是大样本下的期望性能，但在小样本条件下，样本级信息量的随机实现值很可能显著低于该理论期望，从而导致 Cramér-Rao 不等式在小样本层面失效；其次，其计算对发送端先验分布存在强依赖性，先验的未知或失配会进一步削弱其理论可用性。因此，在小样本与弱先验的实际应用场景中，Fisher 信息作为性能评估的基准表现出较差的稳健性。

为应对 Fisher 信息界限的根本局限，笔者引入信息保真度^[20]以构建一个更具稳健性的性能评估新范式。该方法的核心优势在于：其一，通过为样本信息量的随机性提供数学上的容忍度，确保了在小样本与低信噪比条件下的评估有效性，克服了 Cramér-Rao 不等式的“小样本失效”问题；其二，摆脱了对发送端先验的强依赖，仅需信道传输特性即可计算，保证了在先验未知或失配时的可靠性。最终，信息保真度提供了一个虽比理想 Cramér-Rao 不等式更宽松、但在实际工程条件下真实可达的性能基准，从而具备更强的现实指导意义。

1 通信系统中的先验信息恢复

考虑一个通信系统，其发送端存在一组离散的内部状态或“模式”，记为 $y \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，先验概率分布为 $P_Y(y)$ 。这些模式可对应于具体应用中的用户、载波、波束或事件状态等。经信道传输后，接收端观测到对应的离散模式 $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ 。由于信道噪声和各种系统非理想性，发送模式 y 与接收模式 x 通过刻画信道特性的转移概率矩阵 $\mathbf{q}_{X|Y}(x|y) > 0$ 进行随机映射。该转移概率矩阵概括了系统中的全部不确定性因素，如噪声、衰落、干扰及量化判决误差。由全概率公式，接收模式的概率分布 P_X 由发送端先验分布 P_Y 和转移概率矩阵 $\mathbf{q}_{X|Y}$ 共同确定， $P_X(x) = \sum_y \mathbf{q}_{X|Y}(x|y) P_Y(y)$ 。

在该系统中，一个核心任务是从接收数据中提取有价值的信息，其通常归结为对发送端先验分布 P_Y 的恢复。若能准确估计出 P_Y ，便可计算平均功率、信噪比等多种重要通信参数。然而，在诸多实际场景中， P_Y 事先未知，其信息隐藏于接收模式的分布 P_X 中。因此，一个典型的处理流程是，依据接收数据，借助无偏估计方法(如极大似然估计)对 P_Y 进行估计，该估计量记为 $\hat{P}_Y$ 。将该估计量称为“无偏”，是指其统计期望等于待估的真实分布，即 $\mathbb{E}[\hat{P}_Y] = P_Y$ ^[19]。

2 通信系统先验信息估计精度的评估方法与性能界限

为定量评估通信系统信息恢复的精度，引入平均噪声-信号比(以下简称‘噪信比’， R)：

$$R = \sum_{y, y' \neq y} P_Y(y') P_Y(y) \frac{\text{Var}[\hat{P}_Y(y)]}{\{\mathbb{E}[\hat{P}_Y(y)]\}^2}, \tag{1}$$

其中 $\text{Var}[\hat{P}_Y(y)]$ 是估计量 $\hat{P}_Y(y)$ 的方差，对应噪声的“功率”；因为 $\hat{P}_Y$ 是无偏估计， $\{\mathbb{E}[\hat{P}_Y(y)]\}^2 = [P_Y(y)]^2$ 则给出了目标“信号”(即真实先验分布)的功率。式(1)中，采用概率权重 $P_Y(y') P_Y(y) (y' \neq y)$ 是因为概率分布 P_Y 的归一化要求，恢复出的 $\hat{P}_Y$ 实际自由度只有 $n-1$ 。因此，在计算平均噪信比时为

避免重复统计,可以任意去掉某个状态 y' ,再对剩余的状态 y 对应的噪信比 $\frac{\text{Var}[\hat{P}_Y(y)]}{\{\mathbb{E}[\hat{P}_Y(y)]\}^2}$ 乘上概率权重 $P_Y(y)$ 取平均。因被去掉的 y' 是任意的,不妨对取掉 y' 这个事件再取平均,对应的概率权重为 $P_Y(y')$,因此有概率权重 $P_Y(y')P_Y(y)$ ($y' \neq y$)。由式(1)得知, R 越小,整体估计误差就越小;反之误差越大。

Cramér-Rao 不等式给出无偏估计的均方误差下界,即 Fisher 信息的倒数^[18]。将该不等式应用于式(1)中噪信比(证明见附录 A),可得:

$$R \geq (n-1)^2 I^{-1}, \quad (2)$$

其中 n 是信号状态个数; I 是 Fisher 信息,如下:

$$I = 2[M_i(1) - 1], \quad (3)$$

其中 $M_i(1)$ 是单次信道传输获取的随机有效信息 i 的矩母函数 $M_i(\beta)$ 在参数 $\beta=1$ 处的取值。

这里,有效信息 i 表示真实信号状态 y 与接收结果 x 间的随机互信息^[21-22], $i = \log \frac{q_{X|Y}(x|y)}{P_X(x)}$, 表示真实信号状态为 y 时,接收结果 x 所包含的 y 的有效信息量。其矩母函数为

$$M_i(\beta) = \sum_{x,y} P_Y(y) q_{X|Y}(x|y) \exp(\beta i). \quad (4)$$

需要说明的是,由于先验分布 P_Y 通常是向量,故对应的 Fisher 信息通常是矩阵。式(3)中的 I 实际是该 Fisher 信息矩阵压缩后的标量函数(二者关系见附录 A)。由于式(2)已充分说明 I 可以决定噪信比的下界,故用 I 直接代表 Fisher 信息或最佳可达估计精度。

在理论分析中,若发送端先验分布 P_Y 与信道转移概率 $q_{X|Y}$ 均精确已知,即可计算出 Fisher 信息 $I(P_Y)$ 并依此确定式(2)中的噪信比下界。该下界为信息恢复精度提供了最优的理论基准。然而,在现实中, P_Y 不仅未知,还必须通过有限的观测样本进行推断,因此其前提与实际通信环境存在显著差异。

为了在实际条件下评估系统性能,可行的方法是用一个估计的先验分布 $\bar{P}_Y$ 替代真实值 P_Y 。该估计值 $\bar{P}_Y$ 可通过对 N 次独立无偏估计(例如极大似然估计)的结果进行统计平均获得。设 $\hat{P}_Y(y,i)$ 为第 i 次 ($i=1,2,\dots,N$) 独立估计得到的分布。

首先,通过接收端的无偏估计器(如极大似然估计器)对先验分布进行多次独立的估计。设 N 为独立估计的总次数, $i=1,2,\dots,N$ 为单次估计的序号, $\hat{P}_Y(y,i)$ 表示第 i 次估计得到的分布。则有:

$$\bar{P}_Y(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{P}_Y(y,i). \quad (5)$$

然后应用此估计值 $\bar{P}_Y$ 替代式(1)和式(4)中的 P_Y ,便可得到 Fisher 信息和噪信比的实际估计量 $\hat{I}(\bar{P}_Y)$ 和 $\hat{R}(\bar{P}_Y)$ 。

由于 $\bar{P}_Y$ 自身是在有限样本下获得的随机估计,其偏离真实先验分布 P_Y 的程度在小样本条件下尤为显著。由此构造的噪信比估计量 $\hat{R}(\bar{P}_Y)$ 也具有明显的随机性。不同采样得到的 $\bar{P}_Y$ 会导致 $\hat{R}(\bar{P}_Y)$ 在样本间产生可观波动。这种由小样本引入的随机性导致违反 Cramér-Rao 不等式的结果,即出现 $\hat{R} < (n-1)^2 \hat{I}^{-1}$, 直接违背了 Cramér-Rao 不等式本身。这种现象表明,当面临先验未知或样本不足的挑战时,经典 Fisher 信息方法存在显著的稳健性缺陷,为此笔者引入信息保真度以构造更稳健的性能界限。

3 通信系统中的信息保真度理论

由式(3)与式(4)可知, Fisher 信息本质上反映了信道传输有效信息(即互信息)的能力。受此启发,为克服上述经典 Fisher 信息理论的稳健性缺陷,笔者提出一种全新的思路:不再依赖于 Cramér-Rao 不等式,而是从信息论出发,构建更为稳健的性能评估指标。为此,引入与互信息概念紧密相关的信息保真度^[20],将其作为衡量系统信息恢复性能的核心度量。

在通信系统的单次传输中,接收端根据接收模式 x 推断信源。其推断过程面临的核心挑战是: x 既可能来自于真实发送的源模式 y ,也可能来自于某个干扰模式 y' ($y' \neq y$)。信息保真度(以下简称“保真

度”)可以定量评估 x 为确认真实信源提供了多少有效信息, 因此将其定义为有效与干扰信息间的差:

$$\sigma = i - \bar{l}, \quad (6)$$

其中 $i = \log \frac{q_{X|Y}(x|y)}{P_X(x)}$ 是真实发送模式 y 的有效信息(见式(4)), 代表当发送 y 接收到 x 时为“确认”这一事实所带来的信息收益; $\bar{l} = \log \frac{q_{X|Y}(x|y')}{P_X(x)}$ 是度量干扰模式 y' ($y' \neq y$) 的干扰信息, 代表接收 x 可能被误认为来自于干扰 y' 的信息成本。因此, 保真度 σ 直接度量了在给定接收 x 的条件下, 相对于潜在的干扰 y' , 系统实际获得了多少关于真实模式 y 的净有效信息。

通过对比式(6)与式(3)可以发现, 二者在数学结构上具有深刻的关联。保真度 σ 表达式中的有效信息 i 对应于 Fisher 信息表达式中(式(3))的矩母函数 $M_i(1)$, 而干扰信息 $\bar{l}$ 则对应于 Fisher 信息表达式中的常数项 1。这种对应关系的理论依据在于: 干扰信息 $\bar{l}$ 的矩母函数 $M_{\bar{l}}(\beta) = \sum_{x,y} P_Y(y) q_{X|Y}(x|y) \exp(\beta \bar{l})$ 在参数 $\beta=1$ 处的取值恰好为 1, 即 $M_{\bar{l}}(1) = 1$ 。因此, Fisher 信息本质上是有效信息 i 与干扰信息 $\bar{l}$ 在特定点上的矩母函数值之差。而保真度可被视为 Fisher 信息概念在随机变量域内的一种推广, 同样具备衡量系统参数估计精度的潜力。

然而, 作为随机变量, σ 的取值可正可负, 不满足通信工程中性能指标通常所需的非负性, 故不能直接应用。为了构建一个非负且能全面评估系统性能的指标, 借鉴 Fisher 信息的构造思路, 引入保真度的矩母函数 $M_\sigma(\beta)$ 作为度量标准:

$$M_\sigma(\beta) = \sum_{x,y,y' \neq y} P_Y(y) P_Y(y') q_{X|Y}(x|y) \exp(\beta \sigma). \quad (7)$$

在此定义中, 对所有干扰模式 $y' \neq y$ 的求和运算, 表明该指标综合了来自全部潜在混淆源的影响。因此, $M_\sigma(\beta)$ 能更全面地刻画系统在信息传输过程中的整体保真性能与抗干扰能力。

4 基于信息保真度的通信系统性能界限及稳健性分析

构建基于信息保真度的性能界限, 关键在于定量刻画上述定义的保真度 σ 和有效信息 i 间的关系。这种关系并非停留在概念层面, 而是直接决定了信息保真度能否替代传统 Fisher 信息, 成为评估通信系统信息恢复精度的新“度量基准”。为此, 笔者通过对比二者的矩母函数形式(见式(4)与式(7)), 给出了其间的严格不等式约束。分析表明(证明详见附录 B), 在 $\beta=1$ 处存在如下不等式:

$$M_\sigma(1) \geq M_i(1). \quad (8)$$

式(8)的等号当且仅当随机变量 X 与 Y 独立时成立, 此时信道输出与输入不存在任何统计相关性, 互信息为零, 所有单次传输的有效信息量 i 恒为零, 表明信道中不含有效信息。因此, 只有在信道为完全无有效信息的退化情形下, 才有 $M_\sigma(1) = M_i(1) = 1$; 一旦 X 与 Y 不独立、信道中存在非零有效信息, 则必有 $M_\sigma(1) > M_i(1)$ 。该不等式反映了一个直观事实: 保真度 σ 在有效信息 i 的基础上还额外纳入了干扰信息 $\bar{l}$ 的统计细节。这种更全面的信息刻画, 使 σ 相较于 i 成为一个信息量更丰富的随机变量, 并最终在数学上体现为式(8)所示的矩母函数关系。

由式(8)可得到 Fisher 信息与保真度矩母函数间的不等关系如下:

$$I \leq E = 2[M_\sigma(1) - 1], \quad (9)$$

其中 I 为式(3)定义的 Fisher 信息, E 是由保真度矩母函数刻画的保真度信息。根据式(8)的等号成立条件, 由于 I 本质上可写成互信息矩母函数 $M_i(\beta)$ 在 $\beta=1$ 处的函数, 而 E 则由 $M_\sigma(1)$ 决定, 式(9)体现了两种信息度量在同一信道下的“强弱关系”: 在一般情况下, 信道中包含有效信息, 有 $I < E$, 说明 $\beta=1$ 处的保真度信息相较 Fisher 信息额外吸收了干扰项、误判事件等带来的统计信息, 对实际信道中的噪声与混淆结构刻画更加全面。

式(9)说明, $\beta=1$ 处的保真度矩母函数相比 Fisher 信息包含了更多的干扰信息成分, 因此能更全面反映实际通信环境中的信息传输特性。

结合式(2)与式(9), 可得到基于保真度信息 E 的通信系统信息恢复性能界限:

$$R \geq (n-1)^2 E^{-1}. \quad (10)$$

结合式(8), 比较式(2)与式(9)可以发现, 相较于 Fisher 信息 I (对应于 Cramér-Rao 不等式), 保真度矩母函数 E 为噪信比提供了更为宽松的下界, 即:

$$R \geq (n-1)^2 I^{-1} \geq (n-1)^2 E^{-1}.$$

该不等式表明, 相比于传统的 Fisher 信息界限, 基于信息保真度的性能界限在实际工程应用中表现出更强的稳健性。这是因为, 即使实际应用中采用式(5)中先验分布的估计值 $\bar{P}_Y$ 代替真实值 P_Y 计算 Fisher 信息 $\hat{I}(\bar{P}_Y)$ 和保真度信息 $\hat{E}(\bar{P}_Y)$, 式(9)中的不等式总是成立的, 也即 $\hat{I}(\bar{P}_Y) \leq \hat{E}(\bar{P}_Y)$ 。因此, 作为随机变量的噪信比 $\hat{R}(\bar{P}_Y)$ 违反式(10)的概率要小于式(2)中的 Cramér-Rao 不等式, 即:

$$\mathbb{P}\{\hat{R}(\bar{P}_Y) < (n-1)^2 \hat{I}^{-1}(\bar{P}_Y)\} \geq \mathbb{P}\{\hat{R}(\bar{P}_Y) < (n-1)^2 \hat{E}^{-1}(\bar{P}_Y)\}。 \quad (11)$$

综合上述, 相较于传统的 Fisher 信息界限, 基于信息保真度的性能界限 $(n-1)^2 E^{-1}$ 通过牺牲一定的“紧致度”换取了对随机估计过程的更强容忍度, 一定程度上消除了因先验信息估计不准而导致的性能界限失效问题。这种以一定的宽松度换取稳健性的策略, 使信息保真度界限在充满不确定性的实际通信环境中, 能够成为一个更可靠、更具实用价值的性能评估基准。

5 实例验证与性能分析

为验证笔者提出的基于信息保真度的性能界限理论, 采用两个例子进行仿真分析。

例1 是严格可解的二进制通信系统模型, 通过对比传统 Fisher 信息界限(式(2))与信息保真度界限(式(10))的性能表现, 验证新方法在实际通信环境中的稳健性优势。考虑一个二进制通信系统, 发送端具有两个可能的信号状态 $y=1$ 或 2 。接收端对应有两个可能的检测结果 $x=1$ 或 2 。由于信道噪声和系统非理想性, 信道传输特性由以下条件概率描述: 正确接收($y=x$)的概率为 $q_{x|y}(1|1)=q_{x|y}(2|2)=p_c$; 错误接收($y \neq x$)的概率为 $q_{x|y}(2|1)=q_{x|y}(1|2)=p_e$ 。为使分析更具实际意义, 设定 $p_c > p_e$, 表明系统具有一定的检测可靠性。根据概率归一化约束 $p_c + p_e = 1$, 引入信道质量参数 $d = (p_c - p_e)/2$, 以表征信道传输性能, 则有:

$$p_c = \frac{1}{2} + d, \quad p_e = \frac{1}{2} - d, \quad 0 < d < \frac{1}{2},$$

其中 d 值越大表示信道质量越高, 系统检测性能越好。

在实际通信系统中, 接收端需要根据观测数据恢复发送端的先验分布 P_Y 。由于二进制系统的特殊性, 只需估计 $p_y = P_Y(y=1)$ 即可完全确定发送端分布。接收端观测结果的边缘概率为

$$p_x = d(2p_y - 1) + \frac{1}{2}。$$

采用极大似然估计方法进行信息恢复。设接收端获得 k 个接收端样本, 其中有 n_1 个结果是 1 。则 p_x 的估计值为 $\hat{p}_x = n_1/k$ 。对应的似然函数为

$$L = p_x^{n_1/k} (1 - p_x)^{1-n_1/k}。$$

通过求解 $\frac{\partial L}{\partial p_y} = 0$, 得到发送端先验概率 p_y 的极大似然估计

$$\hat{p}_y = \frac{2\hat{p}_x + 2d - 1}{4d}。 \quad (12)$$

在实际通信环境中, 由于先验概率 p_y 未知, 需要通过 N 次独立的极大似然估计获得统计平均结果, 根据式(5)可得到:

$$\bar{P}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_y(i)。 \quad (13)$$

基于此, 可计算相应的噪信比和 Fisher 信息估计值:

$$\hat{R} = k \frac{\bar{P}_y^2 + (1 - \bar{p}_y)^2}{\bar{p}_y(1 - \bar{p}_y)} \text{var}[\hat{p}_y], \quad \hat{I} = \frac{32\bar{p}_y(1 - \bar{p}_y)d^2}{1 - 4d^2(1 - \bar{p}_y)^2}, \quad (14)$$

其中

$$\text{var}[\hat{p}_y] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_y^2(i) - \bar{p}_y^2 \tag{15}$$

是 N 次极大似然估计的方差。

相应地，信息保真度的矩母函数 $M_\sigma(1)$ (见式(6)和式(9))在该二进制系统中的计算公式为

$$\hat{M}_\sigma(1) = \bar{p}_y(1 - \bar{p}_y) \frac{(1 + 2d)^3 + (1 - 2d)^3}{1 - 4d^2} + \bar{p}_y^2 + (1 - \bar{p}_y)^2. \tag{16}$$

为全面评估两种性能界限的稳健性，设计如下仿真实验：1) 随机挑选 4 个先验概率 $p_y = P_Y(y=1)$ 的值，让条件分布的参数 d 在 0.1 ~ 0.5 间变化；2) 对每组参数，随机进行 100 组独立实验，每组实验包含 100 个观测样本；3) 利用式(12)计算极大似然估计，通过式(13) ~ 式(16)计算相应的性能指标。

图 1 给出了基于极大似然法估计先验概率时，式(2)和式(10)预测的精度下界随信道参数 d 的变化趋势曲线。其中横轴为信道质量参数 d ，纵轴为噪信比精度下界。虚线表示传统 Fisher 信息界限 $\hat{I}^{-1}$ (式(2))，实线表示基于信息保真度的界限 $\hat{E}^{-1}$ (式(10))，空心圆线表示噪信比 $\hat{R}$ 。首先，从稳健性角度分析，传统 Fisher 信息界限在多个参数点出现 $\hat{R} < (n-1)^2 \hat{I}^{-1} = \hat{I}^{-1}$ 的现象，违背了理论下界的基本要求。这表明在有限样本和先验信息不完整的实际通信环境中，经典 Cramér-Rao 不等式失去了可靠性。其次，从适用性角度分析，基于信息保真度的界限 $(n-1)^2 \hat{E}^{-1} = \hat{E}^{-1}$ 始终保持其下界特性，即使在信道质量较差 (d 较小) 的情况下仍能提供有效的性能基准。

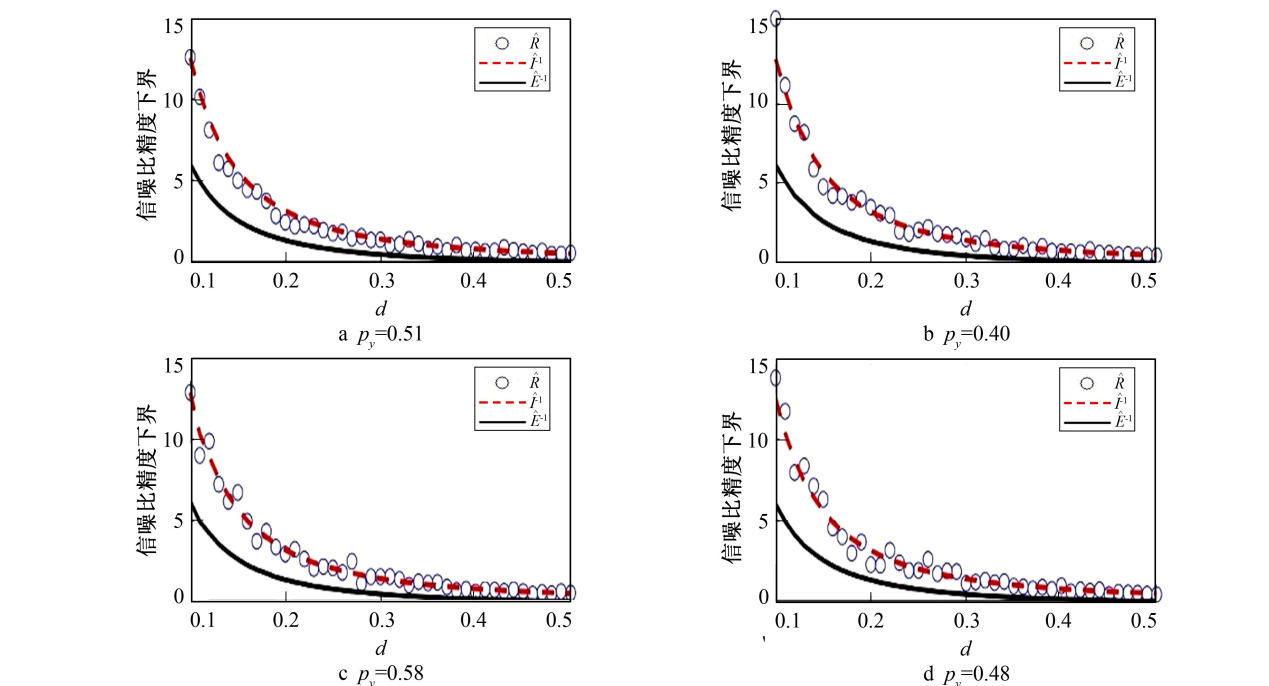


图 1 二进制通信系统中基于极大似然估计的性能界限对比
Fig. 1 Performance bound comparison based on maximum likelihood estimation in binary communication systems

例 2 旨在考察多模信号传输信道 ($n \geq 2$) 中，噪信比估计值 $\hat{R}$ 违反式(2)和式(10)中约束条件的频次 (见式(11))。利用例 1 中的极大似然法获取先验分布估计 $\hat{P}_Y$ ，依据式(5)计算其平均值 $\bar{P}_Y$ ，然后将 $\bar{P}_Y$ 分别代入式(1)、式(3)和式(9)中以求解 $\hat{R}$ 、 $\hat{I}$ 和 $\hat{E}$ 。在仿真实验中，在每个模式数 n 条件下，随机生成 2 000 组转移概率矩阵 $\mathbf{q}_{X|Y}$ ，统计 $\hat{R}$ 违反式(2)或式(10)的频次，计算式如下：

$$\frac{1}{2\,000} \sum_{k=1}^{2\,000} \mathbb{I}(\mathbf{x}_k).$$

其中 $\mathbf{x}_k$ 表示用第 k 组数据计算得到的 $\hat{R}_k$ 是违反式(2)或式(10)。如果违反，则 $\mathbb{I}(\mathbf{x}_k) = 1$ ；否则 $\mathbb{I}(\mathbf{x}_k) =$

0。

图2给出了噪信比估计值 $\hat{R}$ 分别违反式(2)和式(10)的相对频次随信号模式数 n 的趋势曲线。结果表明,随着 n 的增加,违反上述两式的相对频次均呈现下降趋势;但在任一 n 值处,违反式(10)的相对频次均显著低于违反式(2)的相对频次。从而验证了式(11)中的概率不等式,充分说明相比于Cramér-Rao不等式,信息保真度界限具有更高的数据稳健性。

6 结 语

理论分析表明,相比经典的Fisher信息界限,笔者提出的基于信息保真度的性能界限在实际通信工程应用中表现出显著的稳健性优势:计算仅依赖于信道传输特性,有效避免了对发送端先验分布的直接依赖;在优先样本和弱先验环境下仍能保持有效的下界特性。二进制通信系统与多模信号传输信道的数值实验进一步验证了上述结论。结果显示,在先验信息不足的条件下,传统Fisher信息界限不仅经常违背下界特性,而且其被违反的频次明显高于基于信息保真度的界限,始终保持更好的数据稳健性和理论有效性。分析结果充分说明了基于信息保真度的性能界限理论,可以为实际工程设计提供了具有更强适用性和鲁棒性的分析工具,对于改善复杂通信环境下的系统性能评估具有重要的理论意义和工程价值。未来工作将围绕该理论在MIMO(Multiple-Input Multiple-Output)系统、认知无线网络等现代通信系统中的应用进行深入研究。

参考文献:

- [1] GOLDSMITH A. Wireless Communications [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [2] VAN NEE R, PRASAD R. OFDM for Wireless Multimedia Communications [M]. Boston: Artech House, 2000.
- [3] STUBER G L, BARRY J R, MCLAUGHLIN S W, et al. Broadband MIMO-OFDM Wireless Communications [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(2): 271-294.
- [4] AKYILDIZIF, SU W, SANKARASUBRAMANIAM Y, et al. Wireless Sensor Networks: A Survey [J]. Computer Networks, 2002, 38(4): 393-422.
- [5] YICK J, MUKHERJEE B, GHOSAL D. Wireless Sensor Network Survey [J]. Computer Networks, 2008, 52(12): 2292-2330.
- [6] HEINZELMAN W R, CHANDRAKASAN A, BALAKRISHNAN H. Energy-Efficient Communication Protocol for Wireless Microsensor Networks [C] // Proceedings of the 33rd Annual Hawaii International Conference on System Sciences. Maui: IEEE, 2000: 1-10.
- [7] MITOLA J, MAGUIRE G Q. Cognitive Radio: Making Software Radios More Personal [J]. IEEE Personal Communications, 2006, 6(4): 13-18.
- [8] HAYKIN S. Cognitive Radio: Brain-Empowered Wireless Communications [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2005, 23(2): 201-220.
- [9] AKYILDIZIF, LEE W Y, VURAN M C, et al. Next Generation/Dynamic Spectrum Access/Cognitive Radio Wireless Networks: A Survey [J]. Computer Networks, 2006, 50(13): 2127-2159.
- [10] RAPPAPORT T S. Wireless Communications: Principles and Practice [M]. 2nd Ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- [11] TSE D, VISWANATH P. Fundamentals of Wireless Communication [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [12] KAY S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory [M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1993.
- [13] VAN TREES H L. Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I: Detection, Estimation, and Linear Modulation

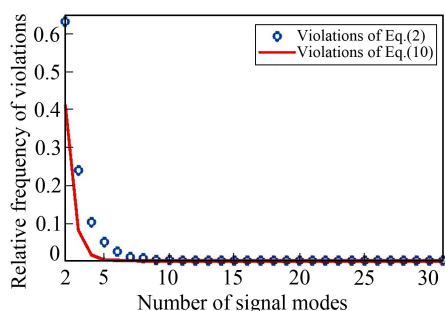


图2 多模信号传输信道,噪信比估计值 $\hat{R}$ 违反式(2)和式(10)频次对比

Fig. 2 Comparison of the frequencies with which the noise-to-signal ratio estimate $\hat{R}$ violates Eq. (2) and Eq. (10) in a multimode signal transmission channel

Theory [M]. New York: Wiley, 2001.

- [14] FISHER R A. On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 1922, 222: 309-368.
- [15] BRUNEL N, NADAL J P. Mutual Information, Fisher Information, and Population Coding [J]. Neural Computation, 1998, 10: 1731-1757.
- [16] FRIEDEN B R, GATENBY R A. Exploratory Data Analysis Using Fisher Information [M]. London: Springer, 2007.
- [17] FRIEDEN B R. Science from Fisher Information: A Unification [M]. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [18] CRAMÉR H. Mathematical Methods of Statistics [M]. Princeton: Princeton University Press, 1946.
- [19] BARKAT M. Signal Detection and Estimation [M]. Boston: Artech House, 1991.
- [20] 马卓, 侯志相, 王世强. 基于信息保真度的最优信息传输 [J]. 吉林大学学报(信息科学版), 2020, 38(6): 662-668.
- MA Z, HOU Z X, WANG S Q. Information Fidelity Based Optimal Information Transfer [J]. Journal of Jilin University (Information Science Edition), 2020, 38(6): 662-668.
- [21] COVER T M, THOMAS J A. Elements of Information Theory [M]. New York: Wiley, 2003.
- [22] GALLAGER R G. Information Theory and Reliable Communication [M]. New York: Wiley, 1968.
- [23] BOYD S P, VANDENBERGHE L. Convex Optimization [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

7 附 录

A. 式(2)的证明

将分布 P_Y 及其估计量 $\hat{P}_Y$ 分别写成向量形式: $\mathbf{P}_Y = [P_Y(1), \dots, P_Y(n)]^T$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_Y = [\hat{P}_Y(1), \dots, \hat{P}_Y(n)]^T$. 估计误差向量 $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{P}}_Y - \mathbf{P}_Y$ 对应的协方差矩阵为 $\mathbf{C} = [cc^T]$. 由于概率归一化约束, 实际的误差向量自由度只有 $n-1$. 于是, 应从误差 c 中移除任意元素 $c(y) = \hat{P}_Y(y) - P_Y(y)$ 变为 $n-1$ 维向量 $\mathbf{c}_y$, 相应的协方差变为 $\mathbf{C}_y = \mathbb{E}[c_y c_y^T]$. 这是一个 $(n-1) \times (n-1)$ 的正定矩阵。

Fisher 信息矩阵 $\mathbf{J}_y$ 是相对熵 $\prod = \sum_x \hat{P}_X(x, \hat{P}_Y) \log \frac{\hat{P}_X(x, \hat{P}_Y)}{P_X(x, P_Y)}$ 在 $\hat{P}_Y = P_Y$ 处的曲率:

$$\mathbf{J}_y = \nabla_{\hat{\mathbf{P}}_Y}^T \prod \Big|_{\hat{\mathbf{P}}_Y = \mathbf{P}_Y} \quad (A1)$$

其中, $\hat{P}_X(x, \hat{P}_Y) = \sum_x q_{X|Y}(x|Y) \hat{P}_Y(y)$ 以及 $P_X(x, P_Y) = P_X(x) = \sum_x q_{X|Y}(x|Y) P_Y(y)$. 注意, 对应于协方差矩阵 $\mathbf{C}_y$ 中, 去掉了 y , 用式(A1)计算 $\mathbf{J}_y$ 时, 需用 $y' \neq y$ 的概率表示 $\hat{P}_Y(y)$, 也即 $\hat{P}_Y(y) = 1 - \sum_{y' \neq y} P_Y(y')$. 这样得到的 $\mathbf{J}_y$ 是一个 $(n-1) \times (n-1)$ 的正定矩阵。计算得到的 $\mathbf{J}_y$ 矩阵元为

$$\mathbf{J}_y(l, m) = \sum_x \frac{d_x(l, y) d_x(m, y)}{P_X(x)}, \quad (A2)$$

其中 $d_x(y', y) = q_{X|Y}(x|Y') - q_{X|Y}(x|Y)$ 。

定义加权协方差矩阵和加权 Fisher 信息矩阵如下:

$$\mathbf{C}_y^{(w)} = D_y^{-1/2} \mathbf{C}_y D_{-1/2y}, \quad \mathbf{J}_y^{(w)} = D_y^{1/2} \mathbf{J}_y D_y^{1/2}, \quad (A3)$$

其中权值矩阵 $\mathbf{D}_y$ 是从 P_Y 中去掉 $P_Y(y)$ 后, 再用剩余的速率生成的对角阵, 也即 $\mathbf{D}_y = \text{diag}\{P_Y(y' \neq y)\}$ 。

式(1)中的噪信比和式(3)中的 Fisher 信息可用 $\mathbf{C}_y^{(w)}$ 和 $\mathbf{J}_y^{(w)}$ 的迹分别为

$$R = \sum_y P_Y(y) \text{tr}\{\mathbf{C}_y^{(w)}\} \text{ 和 } I = \sum_y P_Y(y) \text{tr}\{\mathbf{J}_y^{(w)}\}. \quad (A4)$$

矩阵形式的 Cramér-Rao 不等式为 $\mathbf{C}_y \geq \mathbf{J}_y^{-1}$, 其中符号 $\geq$ 表示 $\mathbf{C}_y - \mathbf{J}_y^{-1}$ 是非负定矩阵。该不等式可直接应用于式(A3)中的加权矩阵, 得到:

$$R \mathbf{C}_y^{(w)} \geq [\mathbf{J}_y^{(w)}]^{-1}. \quad (A5)$$

因为 $\mathbf{C}_y$ 和 $\mathbf{J}_y$ 都是正定的, 所以 $\mathbf{C}_y^{(w)}$ 和 $\mathbf{J}_y^{(w)}$ 都是正定的, 于是有关 $\mathbf{J}_y^{(w)}$ 的逆矩阵迹不等式如下:

$$\text{tr}\{[\mathbf{J}_y^{(w)}]^{-1}\} = \sum_l \lambda_l^{-1} \geq \frac{(n-1)^2}{\sum_l \lambda_l} = \frac{(n-1)^2}{\text{tr}\{\mathbf{J}_y^{(w)}\}}, \quad (A6)$$

其中 $\lambda_l > 0$ 是 $\mathbf{J}_y^{(w)}$ 的特征值 (一共 $n-1$ 个特征值)。该不等式成立是由于倒数函数 x^{-1} 在 $x > 0$ 时是凸函数^[23], 并由此满足 Jensen 不等式 $\frac{1}{k} \sum_{l=1}^k x_l^{-1} \geq \left(\frac{1}{k} \sum_{l=1}^k x_l \right)^{-1}$ 。

结合式 (A4) 中噪信比和 Fisher 信息的表达式, 根据式 (A5) 和式 (A6), 即可得到式 (2) 中的不等式, 如下:

$$R = \sum_y P_Y(y) \text{tr} \{ C_y^{(w)} \} \geq \sum_y P_Y(y) \text{tr} \{ [\mathbf{J}_y^{(w)}]^{-1} \} \geq (n-1)^2 \sum_y P_Y(y) [\text{tr} \{ \mathbf{J}(w)_y \}]^{-1} \geq (n-1)^2 \left[\sum_y P_Y(y) \text{tr} \{ \mathbf{J}_y^{(w)} \} \right]^{-1} = (n-1)^2 I^{-1}。$$

上述推导中, 最后一个不等式也是利用了倒数函数 $x^{-1} (x > 0)$ 的凸性。式 (2) 证毕。

B 式 (7) 的证明

式 (4) 中的随机有效信息 (互信息) i 可以写成式 (5) 中随机保真度 σ 的函数, 如下:

$$i = \log \frac{q_{X|Y}(x|Y)}{P_X(x)} = \log \left(\sum_{y'} P_Y(y') \exp(-\sigma) \right)^{-1}。 \quad (\text{B1})$$

由式 (B1), 得到矩母函数 $M_i(\beta)$ 和 $M_\sigma(\beta)$ (见式 (4) 和式 (6)) 在 $\beta=1$ 处的大小关系:

$$M_i(1) = \sum_{x,y} P_Y(y) q_{X|Y}(x|Y) \exp(i) = \sum_{x,y} P_Y(y) q_{X|Y}(x|Y) \left(\sum_{y'} P_Y(y') \exp(-\sigma) \right)^{-1} \leq \sum_{x,y} P_Y(y) q_{X|Y}(x|Y) \sum_{y'} P_Y(y') \exp(\sigma) = M_\sigma(1)。$$

上述推导中, 等式成立条件是 $q_{X|Y}(x|Y) = P_X(x)$, 也即 X 和 Y 互相独立。不等式成立是由于倒数函数 $x^{-1} (x > 0)$ 的凸性。式 (7) 证毕。

(责任编辑: 张洁)