文章编号:1674-2974(2024)11-0167-10 DOI:10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2024118

基于双参数地基Timoshenko梁的轻型桥台弯曲分析

夏桂云[1,2†],刘洪[1]
(1. 长沙理工大学 土木工程学院,湖南 长沙,410114;
2. 长沙理工大学 桥梁工程安全控制教育部重点实验室,湖南 长沙,410114)

摘 要:建立了轻型桥台自身平面内弯曲分析的双参数地基Timoshenko梁模型,简要讨论了其退化形式和适应性能.基于微分方程的初参数解,建立了双参数地基Timoshenko梁的传递矩阵法;基于Timoshenko梁单元的位移插值函数,建立了双参数地基Timoshenko梁有限元列式.通过算例分析,发现轻型桥台自身平面内弯曲存在最大弯矩位于对称中心和偏离对称中心两种情况;利用ANSYS空间有限元模型对此现象进行了验证.讨论了桥台变形和内力随桥台襟边宽度和地基不均匀的变化规律.鉴于轻型桥台自身平面内弯曲存在最大弯矩偏离对称中心且比对称中心截面弯矩大、对称中心截面弯矩是局部最小值的可能现象,建议教材《桥梁工程》和专业文献摈弃以对称中心截面弯矩作为最大值的简化设计计算方法,对计算理论进行补充和完善.地基不均匀显著影响桥台的变形和内力,简单地取最软或最硬地基参数进行桥台弯曲分析不能得到最大内力值,不是安全的设计计算方法.

关键词:轻型桥台;弯曲分析;双参数地基;Timoshenko梁;剪切变形
中图分类号:U448;TB115 **文献标志码**:A

Flexural Analysis of Light Abutment Based on Timoshenko Beam on Two-Parameter Foundation

XIA Guiyun[1,2†], LIU Hong[1]
[1. School of Civil Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China;
2. Key Laboratory of Bridge Engineering Safety Control, Ministry of Education(Changsha University of Science & Technology), Changsha 410114, China]

Abstract: The Timoshenko beam model on a two-parameter foundation is presented for the flexural analysis of light type abutment in its self-plane. Its degenerating formulations and adaptability are discussed briefly. Based on the initial parameter solutions to the differential equation, the transfer matrix method is established for the Timoshenko beam on the two-parameter foundation. Based on the interpolation functions of the Timoshenko beam element, the finite element formulation of the Timoshenko beam on the two-parameter foundation is achieved. Numerical example results demonstrate that there are two phenomena found with the maximal moment position located on and deviating from the symmetrical center. Spatial finite element analyses of ANSYS are carried out and

* **收稿日期**:2023-12-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(51278072),National Natural Science Foundation of China(51278072);湖南省教育厅重点项目(22A0223),Key Project of Education Department of Hunan Province(22A0223)
作者简介:夏桂云(1972—),男,湖南湘阴人,长沙理工大学教授,博士
† 通信联系人,E-mail:xiagy72@163.com

verify the phenomena. The variation laws of deformations and internal forces of the abutment in its self-plane are investigated along the tread width and non-uniformity of foundation. Given that the maximal moment position in the self-plane of light abutment deviates from the symmetrical center, the quantity is greater than that of the symmetrical center, and the moment at the symmetrical center is a local minimum, the current simplified method and design process with the center moment as the maximal result are suggested to be abandoned in many bridge engineering literature. The relevant theories need to be improved and refined. The unevenness of the foundation affects the deformations and inner forces in light abutment. The simple operation adopting the relevant parameters of the softest or the hardest foundations fails to achieve the maximum results, which is not safe for design practices.

Key words: light type abutment; flexural analysis; two-parameter foundation; Timoshenko beam; shear deformation

轻型桥台广泛应用于桥梁结构,因其平直薄墙特性,在竖向荷载下会产生平面内弯矩,设计时需验算最大弯矩与基底最大应力[1]. 目前分析计算时,常以理论解析为主,将轻型桥台模拟成Winkler地基Euler-Bernoulli梁,忽略结构的截面变化而简化为等截面、两端自由结构,假定荷载关于中心对称分布. 国内几乎所有教材《桥梁工程》[1-9]和文献[10-13]均指出,对称中心截面弯矩和基底反力最大,并给出了两种本质相同的计算公式:一是基于克雷洛夫函数的解析解[1-3, 11-13],二是采用基本函数表达的解析解[4-9]. 但这两种解析方法存在以下不足:1)Winkler地基模型过于简单. Winkler地基为单参数模型,未考虑地基土体间剪切变形的影响,难以全面描述复杂地基的受力和变形特性,适应范围有限[14-15]. 如果采用考虑地基剪切影响的双参数地基[16],可以弥补Winkler地基不连续的缺陷[16-17],有助于扩大计算模型的应用范围并提高计算精度.2)轻型桥台的台身高度相对于长度较大,超出初等梁理论的适用范围,应采用考虑剪切变形影响的深梁理论[18-19].3)轻型桥台自身平面内的对称中心截面弯矩、基底反力公式[1-13]基于人为假定的地基变形,没有完全遵循Winkler地基的模型假定,导致基底反力与实际工程存在差异.4)教材《桥梁工程》[1-9]和文献[11-13]认为,轻型桥台自身平面内弯曲时有效长度一般为$\alpha L\in[1.2,4]$,视为弹性地基有限长梁,且对称中心截面弯矩最大,可作为全长范围的设计值,这与精细的理论分析存在偏差. 2010年,夏桂云等[20]基于Winkler地基Timoshenko梁理论分析轻型桥台自身平面内弯曲问题时发现,在某些情况下,最大弯矩截面可能偏离对称中心,且最大弯矩大于对称中心截面弯矩,这与文献[1-13]的假定不符. 但需注意,夏桂云等的研究仅为个别算例,不能一概而论. 在工程实践中,仍存在对称中心即为最大弯矩截面的情况,此时现行计算方法[1-13]适用且预测准确.

鉴于文献[1-13]分析轻型桥台自身平面内弯曲时只考虑了最大弯矩位于对称中心的情况,而未考虑偏离对称中心的情况,为全面揭示其弯曲特性,本文放弃Winkler地基上的Euler-Bernoulli梁理论,转而采用适用性更强的双参数地基Timoshenko深梁理论进行分析. 期望研究成果能补充和完善关于轻型桥台平面内弯曲的理论分析.

1 双参数地基Timoshenko梁理论及求解

将双参数地基Timoshenko梁理论应用于轻型桥台自身平面内的弯曲分析时,其能量方程为:

$$\pi=\int\left[\frac{D}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\frac{C}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)^2+\frac{K}{2}w^2+\frac{T}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-qw-m\psi\right]\mathrm{d}x \tag{1}$$

式中:$D=EI$、$C=\mu GA$分别为Timoshenko梁抗弯刚度和抗剪刚度;E、G分别为Timoshenko梁材料弹性模量和剪切模量;A、I、μ分别为Timoshenko梁截面面积、抗弯惯性矩和剪切修正系数;$K=kb$、$T=gb$分别为双参数地基竖向刚度和抗剪刚度,b为Timoshenko梁截面宽度;k、g分别为地基基床系数和剪切系数;q、m分别为竖向分布荷载和分布弯矩;w、ψ分别为Timoshenko梁竖向挠度和截面弯曲转角.

经过变分运算,得到微分方程[18, 21]为:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left[C\cdot\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)\right]+Kw-T\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=q \\ -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right)-C\cdot\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)=m \end{cases} \tag{2}$$

工程结构中一般没有分布弯矩m作用，不考虑式(2)中m的影响，将式(2)进行解耦，得到关于挠度w的微分方程如下：

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{KD+TC}{D(C+T)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{KC}{D(C+T)}w=\frac{Cq}{D(C+T)}-\frac{1}{C+T}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \tag{3}$$

上述微分方程可采用多种方法求解，如解析法、有限差分法、微分求积法、Green函数法、辛特征值法、奇异函数法、传递矩阵法、有限元法等. 本文拟采用传递矩阵法和有限元法两种方法求解.

1.1 传递矩阵法

利用初参数法[18, 22]对式(3)进行求解，则桥台自身平面内的挠度w、转角ψ、剪力Q和弯矩M用初参数统一表示为：

$$\begin{cases} w(x)=a_1(x)w_0+b_1(x)\psi_0+c_1(x)Q_0+d_1(x)M_0+w_{\mathrm{m}}(x) \\ \psi(x)=a_2(x)w_0+b_2(x)\psi_0+c_2(x)Q_0+d_2(x)M_0+\psi_{\mathrm{m}}(x) \\ Q(x)=a_3(x)w_0+b_3(x)\psi_0+c_3(x)Q_0+d_3(x)M_0+Q_{\mathrm{m}}(x) \\ M(x)=a_4(x)w_0+b_4(x)\psi_0+c_4(x)Q_0+d_4(x)M_0+M_{\mathrm{m}}(x) \end{cases} \tag{4}$$

式中：$a_i(x)$、$b_i(x)$、$c_i(x)$、$d_i(x)$(i=1, 2, 3, 4)为计算函数，$w_{\mathrm{m}}(x)$、$\psi_{\mathrm{m}}(x)$、$Q_{\mathrm{m}}(x)$、$M_{\mathrm{m}}(x)$为荷载修正项，具体表达式见文献[18, 22].

采用与文献[1-13]一致的简化处理，不考虑台身厚度、宽度的变化，取如图1所示的等截面弹性地基梁为计算模型，坐标原点取在对称中心O点.

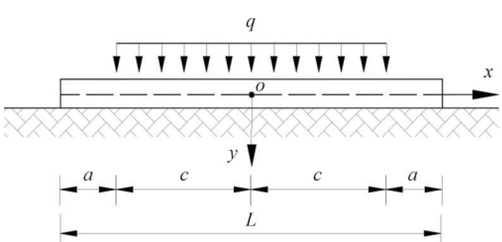


图1　轻型桥台的弹性地基梁计算模型

Fig.1　Schematic representation of elastic foundation beam for light type abutment

根据结构的对称性，知ψ_0=0、Q_0=0；且边缘自由边界的剪力、弯矩为0，从而解得对称中心的挠度、弯矩解析解为：

$$\begin{cases} w_0=\dfrac{d_3(L/2)M_{\mathrm{m}}-d_4(L/2)Q_{\mathrm{m}}}{a_3(L/2)d_4-a_4(L/2)d_3} \\ M_0=\dfrac{a_3(L/2)M_{\mathrm{m}}-a_4(L/2)Q_{\mathrm{m}}}{a_4(L/2)d_3-a_3(L/2)d_4} \end{cases} \tag{5}$$

荷载修正项为：

$$\begin{cases} Q_{\mathrm{m}}=\dfrac{qC\left[a_3(a)-a_3(L/2)\right]}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \\ M_{\mathrm{m}}=\dfrac{qC\left[a_4(a)-a_4(L/2)\right]}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \end{cases} \tag{6}$$

式中：波数系数α、β的表达式见文献[18, 22].

初参数w_0、M_0确定后，即可明确结构整体受力状态，仅需分别处理荷载修正项.

1.1.1　$0<x\leqslant c$区域的荷载修正项

$$\begin{cases} w_{\mathrm{m}}=\dfrac{qC\left[1-a_1(x)\right]}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \\ \psi_{\mathrm{m}}=-\dfrac{qCa_2(x)}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \\ Q_{\mathrm{m}}=-\dfrac{qCa_3(x)}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \\ M_{\mathrm{m}}=-\dfrac{qCa_4(x)}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \end{cases} \tag{7}$$

将ψ_0=Q_0=0、式(5)和式(7)代入式(4)，可计算此区域的全部受力状态量.

1.1.2　$c<x\leqslant L/2$区域的荷载修正项

$$\begin{cases} w_{\mathrm{m}}=\dfrac{qC\left[a_1(x-c)-a_1(x)\right]}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \\ \psi_{\mathrm{m}}=\dfrac{qC\left[a_2(x-c)-a_2(x)\right]}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \\ Q_{\mathrm{m}}=\dfrac{qC\left[a_3(x-c)-a_3(x)\right]}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \\ M_{\mathrm{m}}=\dfrac{qC\left[a_4(x-c)-a_4(x)\right]}{D(C+T)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \end{cases} \tag{8}$$

根据传递矩阵法的计算理论及此区域的荷载修正项，即可确定结构的全部受力状态量.

1.2 有限元列式

考虑结构截面的变化，采用传递矩阵法计算工作量大，本文建立双参数地基Timoshenko梁的有限元列式.

丁敏等[16]、李静等[17]、夏桂云等[22]建立了双参数地基Timoshenko深梁单元的超越有限单元(解析有

限元、准确有限元)列式,虽然超越有限元计算准确、收敛性好、计算精度不依赖网格密度,但是建立时依赖于微分方程的解析解,解析解需要根据特征系数进行分相.文献[16-17,22]仅解决了特征系数$\Delta<0$的情况(工程结构大部分属于此类情况),未涉及刚性地基情况[23].针对$\Delta=0$及$\Delta>0$情形的有限元模型尚需深化与完善理论推导,且现有有限元方法[16-17,22]在刚度及计算结果上存在差异.为此本文采用Reddy提出的Timoshenko深梁单元位移模式[24],建立双参数地基Timoshenko梁有限元.Timoshenko深梁单元位移模式[24]为:

$$\begin{cases} w = [N_w]\{\delta\}^e \\ \psi = [N_\psi]\{\delta\}^e \end{cases} \tag{9}$$

式中:$[N_w]$、$[N_\psi]$分别为单元位移和转角的插值函数,具体表达式见文献[18,24];$\{\delta\}^e$为单元节点位移.

将位移模式(9)代入能量方程(1),经变分得到双参数地基Timoshenko深梁单元的有限元平衡方程为:

$$[K]^e\{\delta\}^e = \{R\}^e \tag{10}$$

单元刚度由Timoshenko梁的弯曲刚度和剪切刚度、地基的竖向刚度和剪切刚度组成,即

$$[K]^e = [K]_B + [K]_S + [K]_W + [K]_T \tag{11}$$

式中:

$$[K]_B = D\int_0^L [N'_\psi]^T[N'_\psi]\mathrm{d}x$$

$$[K]_S = C\int_0^L [N'_w - N_\psi]^T[N'_w - N_\psi]\mathrm{d}x$$

$$[K]_W = K\int_0^L [N_w]^T[N_w]\mathrm{d}x$$

$$[K]_T = T\int_0^L [N'_w]^T[N'_w]\mathrm{d}x$$

式中:$[N'_\psi]$、$[N'_w]$分别为$[N_\psi]$、$[N_w]$关于x的一阶导数.

单元非节点荷载的等效公式为:

$$\{R\}^e = \int_0^L q[N_w]^T\mathrm{d}x + \int_0^L m[N_\psi]^T\mathrm{d}x \tag{12}$$

1.3 计算模型的退化

双参数地基Timoshenko梁理论中,结构参数取特定值时,计算模型可以进行退化,如Winkler地基Timoshenko梁模型($T=0$)[20]、双参数地基Euler-Bernoulli梁模型($C\to\infty$)[25]、Winkler地基Euler-Bernoulli梁模型($T=0$、$C\to\infty$)[1-2].一般认为,当梁高h与跨径L之比$h/L>1/5$时为深梁研究范畴[26],ANSYS等软件将弯剪刚度比$D/(CL^2)>1/30$作为深梁的研究范畴.从理论上来说,Timoshenko梁考虑剪切变形影响,是对Euler-Bernoulli梁的改进和精化,以Euler-Bernoulli梁为理论基础的杆系结构的静力、动力、稳定问题都可用Timoshenko梁理论进行重建和改写.因此,本文的双参数地基Timoshenko梁模型是考虑全面、适用范围广泛的通用模型,其他3种经典模型是其特例.

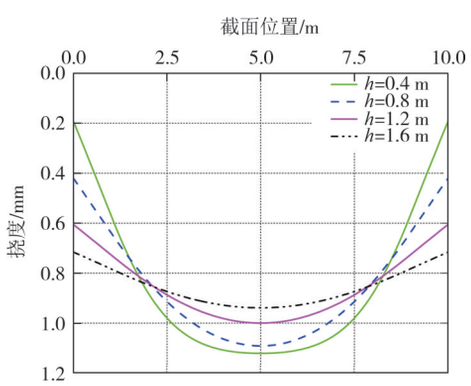
2 工程实例分析

为分析轻型桥台在平面内弯曲时的内力大小和分布情况,并比较不同理论模型的差异,本文对某工程实例进行分析并深入探讨.

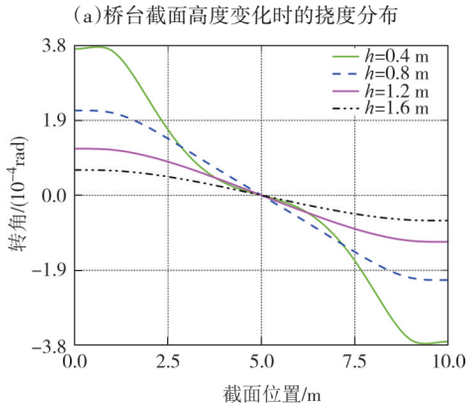
将轻型桥台简化为等截面弹性地基梁,计算简图如图1所示.轻型桥台参数取值为深梁弹性模量E=2.55×10^7 kN/m^2、剪切模量G=1.02×10^7 kN/m^2,地基基床系数k=1.12×10^5 kN/m^3、剪切系数g=2.5×10^4 kN/m.

2.1 截面高度对内力分布的影响

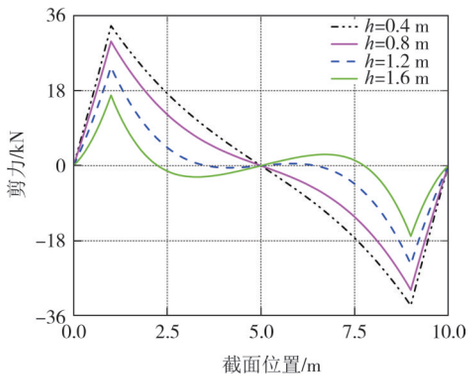
取桥台长度L=10.0 m、桥台宽度b=0.4 m;改变桥台截面高度,分别取h=0.4 m、0.8 m、1.2 m、1.6 m;襟边宽度a=1.0 m、加载宽度$2c$=8.0 m;均布荷载q=48 kN/m.在荷载作用下,截面的挠度、转角、剪力和弯矩分布如图2所示.



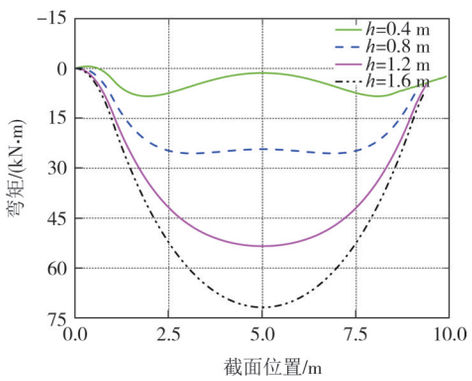
(a)桥台截面高度变化时的挠度分布



(b)桥台截面高度变化时的转角分布



(c)桥台截面高度变化时的剪力分布



(d)桥台截面高度变化时的弯矩分布

图2　挠度、转角、剪力、弯矩随桥台截面高度变化的曲线

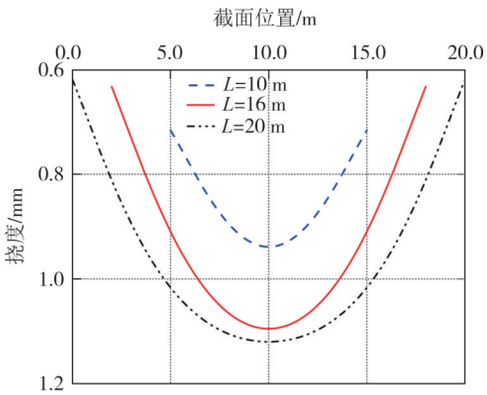
Fig.2　The variation curves of displacement、rotation、shear、moment against the height variations in abutment

按照Winkler地基Euler-Bernoulli梁模型和教材《桥梁工程》[1-9]以及文献[10-13]的处理方法,截面高度为0.4 m和0.8 m时的有效长度αL分别为6.76和4.01,均大于4,属于弹性地基无限长梁. 如图2(d)所示,其最大弯矩截面偏离对称中心,对称中心截面弯矩为局部最小值. 截面高度为1.2 m和1.6 m时有效长度αL分别为2.96和2.38,在区间[1.2,4]内,属于弹性地基有限长梁,此时,与文献[1-13]的预测一致,对称中心截面的弯矩最大,将此作为全结构设计值是准确的,文献[1-13]方法在此算例中适用.

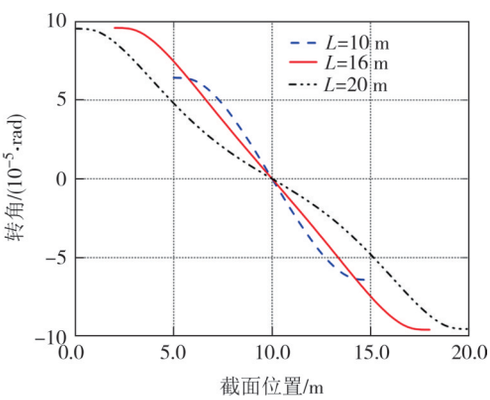
2.2　桥台长度对内力分布的影响

保持桥台宽度b=0.4 m、桥台截面高度h=1.6 m、襟边宽度a=1.0 m不变,改变桥台长度,分别取L=10 m、16 m和20 m,对应加载长度$2c$变为8 m、14 m和18 m,均布荷载q=48 kN/m. 在荷载作用下,截面挠度、转角、剪力和弯矩分布如图3所示.

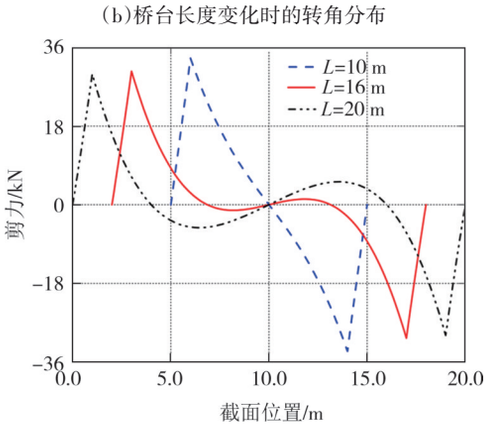
台长10 m、16 m、20 m对应的有效长度αL分别为2.38、3.81和4.76. 与前述类似,台长20 m时属于弹性地基无限长梁,且从图3(d)可以看出,最大弯矩截面偏离对称中心,对称中心截面弯矩为局部最小



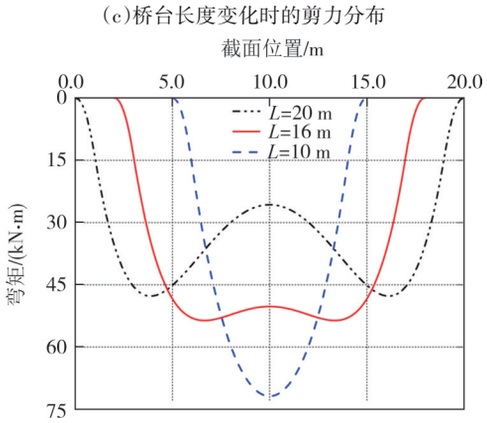
(a)桥台长度变化时的挠度分布



(b)桥台长度变化时的转角分布



(c)桥台长度变化时的剪力分布



(d)桥台长度变化时的弯矩分布

图3　挠度、转角、剪力、弯矩随桥台长度变化的曲线

Fig.3　The variation curves of displacement、rotation、shear、moment against the length variations in abutment

值.台长10 m和16 m同属弹性地基有限长梁,但受力状态截然不同:台长10 m时对称中心截面为弯矩最大截面,文献[1-13]计算公式准确适用;而台长16 m时的最大弯矩截面偏离对称中心,对称中心截面弯矩为局部最小值,文献[1-13]的计算公式不适用,无法准确预测结构的最大弯矩值.由此可见,弹性地基有限长梁的最大弯矩可能位于和偏离对称中心,文献[1-13]的计算公式并非对所有弹性地基有限长梁都适用,存在特例.

以上计算采用传递矩阵法和有限元法(单元网格宽度为0.1 m)同时进行,结果一致,相互验证了准确性.

2.3 退化模型的结果对比

取桥台宽度b=0.4 m、桥台高度h=1.6 m、襟边宽度a=1.0 m、桥台长度L=16.0 m、加载长度$2c$=14.0 m、均布荷载q=48 kN/m.分别采用Winkler地基Euler-Bernoulli梁模型、Winkler地基Timoshenko梁模型、双参数地基Euler-Bernoulli梁模型、双参数地基Timoshenko梁模型4种理论对结构进行分析,结果如表1所示.

表1 4种理论的关键结果比较

Tab.1 Key results comparison of four theories

比较项目	Winkler地基Euler-Bernoulli梁	Winkler地基Timoshenko梁	双参数地基Euler-Bernoulli梁	双参数地基Timoshenko梁
最大挠度/mm	1.099 9	1.099 5	1.095 5	1.095 1
最大转角/(10^{-5} rad)	9.986 3	9.874 9	9.688 5	9.574 8
最大剪力/kN	30.371 9	30.194 2	30.699 1	30.530 4
最大弯矩/(kN·m)	55.849 3	55.184 8	54.282 3	53.601 2
对称中心弯矩/(kN·m)	52.249 9	51.593 0	50.870 5	50.229 8
最大弯矩/中心弯矩	1.068 9	1.069 6	1.067 1	1.067 1
最大弯矩位置/m	3.4	3.4	3.3	3.3

由表1可以看出:1)轻型桥台自身平面内弯曲,采用不同的计算理论,所得到的变形和内力结果的数值及位置略有差异,但分布特征基本相似.例如挠度变形,Winkler地基Euler-Bernoulli梁理论的最大挠度为1.099 9 mm,是4种模型中的最大值;双参数地基Timoshenko梁模型挠度为1.095 1 mm,是4种模型中的最小值,两者相差0.44%.通常采用不考虑剪切变形影响的Euler-Bernoulli梁理论预测杆系结构变形结果偏小[18-19],但预测弹性地基梁时,Euler-Bernoulli梁理论结果比考虑剪切变形影响的Timoshenko梁理论结果偏大,两种情况相反.2)此算例中,无论采用哪种理论模型,最大弯矩都不在对称中心位置,并且比对称中心截面弯矩大.Winkler地基Euler-Bernoulli梁理论的最大弯矩为55.849 3 kN·m,是4种理论预测中的最大值,最大弯矩与对称中心截面弯矩之比为1.068 9;双参数地基Timoshenko梁理论的最大弯矩为53.601 2 kN·m,是4种理论预测中的最小值,最大弯矩与对称中心截面弯矩之比为1.067 1.最大弯矩位置距原点O的距离基本相同.由此可见,教材《桥梁工程》[1-9]和文献[10-13]所推荐的以对称中心截面弯矩作为最大值进行结构设计不安全,且其中推荐的计算公式不能得到准确的最大弯矩值,建议对计算理论和设计方法进行补充和完善.本文所建立的传递矩阵法和有限元法适用于轻型桥台自身平面内弯曲分析,当最大弯矩位于对称中心时,式(5)对应文献[1-13]中基于双参数地基Timoshenko梁理论的公式.当最大弯矩偏离对称中心时,可用传递矩阵法或有限元法进行台身受力的细化分析,以准确获取全台长范围的受力状态.3)无论是Winkler地基还是双参数地基,考虑梁的剪切变形影响,用Timoshenko梁理论计算的挠度比Euler-Bernoulli梁理论计算的挠度小且均匀,从而导致最大转角、最大剪力和最大弯矩都比Euler-Bernoulli梁理论结果小.

3 空间有限元分析

为验证双参数地基Timoshenko梁模型预测轻型桥台自身平面内弯曲的准确性,并验证最大弯矩是否偏离对称中心,利用ANSYS软件建立空间有限元模型进行分析.取地基长、宽、高分别为100 m、100 m和50 m,底部和四周均为固结,地基弹性模量E=

40 MPa,泊松比μ=0.35. 桥台的梁长、梁截面、荷载大小及加载、参数变化等与2.1节、2.2节算例一致. 地基与桥台梁均采用八节点实体单元SOLID45进行离散,地基与桥台梁的连接采用MPC多点耦合接触,结合部位使用目标单元TARGE170和接触单元CONTA173. 同时为提高模拟精度,对实体单元进行了精细化的网格划分,如图4所示.

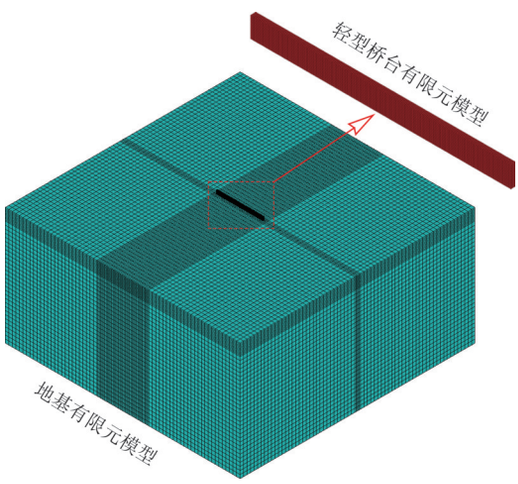


图4　空间有限元模型网格划分

Fig.4　Meshing of spatial finite element model

模拟2.1节的算例,改变桥台截面高度,利用ANSYS空间实体有限元模型进行分析,得到挠度和梁底弯曲应力分布结果分别见图5、图6. ANSYS实体单元无法直接获得桥台梁截面的弯矩,但根据梁的计算理论,截面弯矩与梁底正应力呈线性关系,因此可以通过梁底应力变化来反应弯矩变化.

由图5和图6可知,空间有限元计算的挠度、应力分布与双参数地基Timoshenko梁模型的结果相

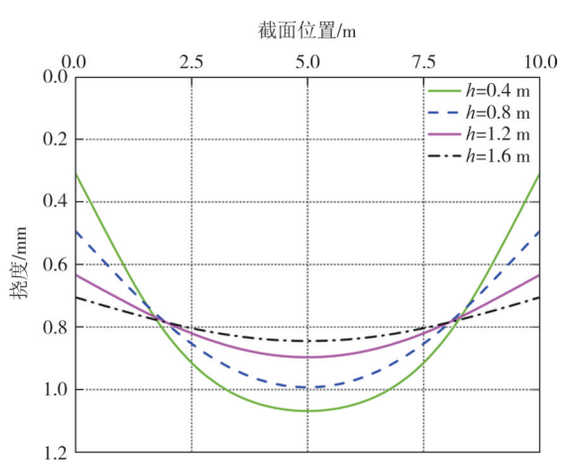


图5　桥台截面高度变化时的挠度分布

Fig.5　Displacement distributions against the height variations in abutment

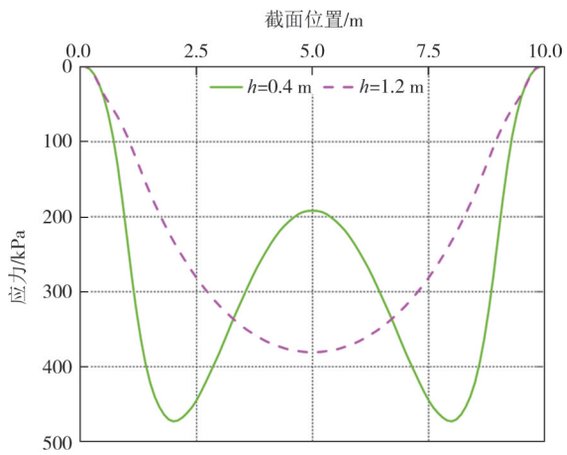


图6　桥台截面高度变化时的应力分布

Fig.6　Stress distributions against the height variations in abutment

符,尽管数值上略有差异. 当h=0.4 m时,最大弯矩偏离对称中心,对称中心截面弯矩为局部最小值;当h=1.2 m时,最大弯矩位于对称中心,对称中心截面弯矩为全局最大值. 空间有限元模型结果进一步验证了轻型桥台自身平面内弯曲的最大弯矩可能位于对称中心也可能偏离对称中心.

模拟2.2节的算例,改变桥台长度,ANSYS空间实体有限元模型的挠度和梁底弯曲应力分布结果分别如图7、图8所示.

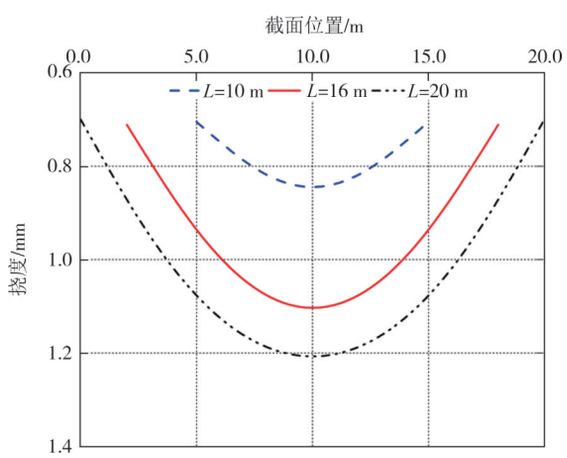


图7　桥台长度变化时的挠度分布

Fig.7　Displacement distributions against the length variations in abutment

由图7和图8可知,空间有限元计算的挠度和应力分布与双参数地基Timoshenko梁模型的结果相符,再次验证了双参数地基Timoshenko梁模型预测轻型桥台自身平面内弯曲的准确性,并再现了最大弯矩位于和偏离对称中心的两种情况. 在设计中,如

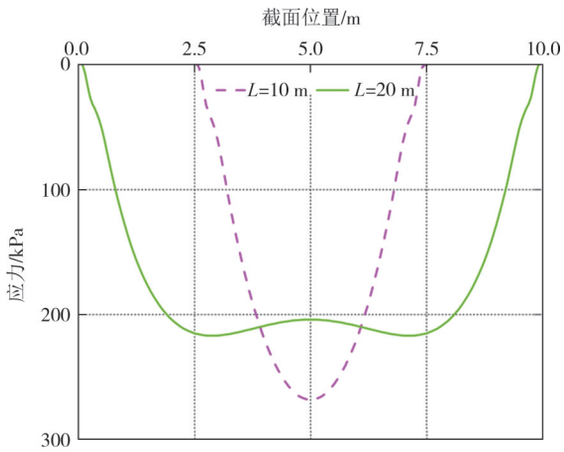


图 8 桥台长度变化时的应力分布

Fig.8 Stress distributions against the length variations in abutment

果直接采用现行方法[1-13],以对称中心截面弯矩作为桥台梁的弯矩设计最大值,则存在安全隐患.因此,现行的计算理论与设计方法有待补充和完善.

4 参数分析

4.1 桥台襟边宽度的影响

保持桥台参数 b=0.4 m、h=1.6 m、L=16.0 m不变,改变襟边宽度 a,相应地加载长度 $2c=L-2a$,截面剪力和弯矩随襟边宽度 a 值的变化曲线分别如图9、图10所示.

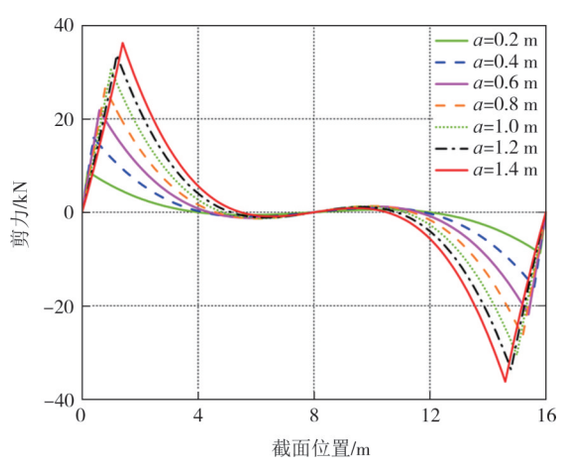


图 9 剪力随襟边宽度 a 变化

Fig.9 Shear variations against the trend width a

由图9和图10可知,桥台襟边宽度 a 对剪力、弯矩的分布和大小影响显著.随着襟边宽度 a 的增大,最大剪力逐渐增大,位于加载区与襟边交界 c 处;最大弯矩也逐渐增大,其位置逐步向对称中心移动.如

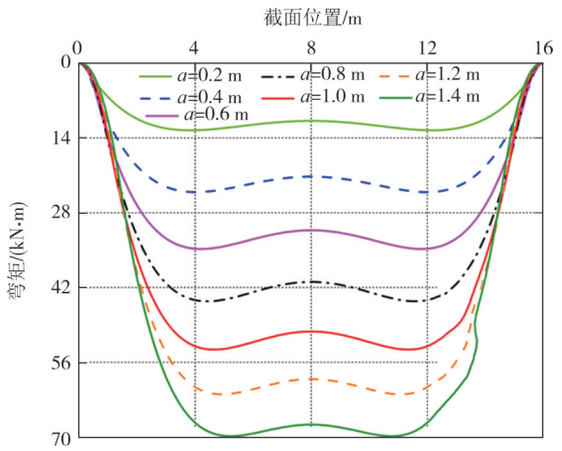


图 10 弯矩 M 随襟边宽度 a 变化

Fig.10 Moment variations against the trend width a

果不设襟边(a=0),根据理论分析和数值计算,结构只发生均匀沉降,所有截面的转角、剪力和弯矩都为0.

4.2 地基不均匀影响

高速公路中,路基经常出现半填半挖的设计方案.开挖部分地基土体扰动小,基床系数大,填方地基基床系数小.如果在这样的地基上修建轻型桥台,则存在不均匀地基现象.仍取图1所示结构进行分析,但将地基分为左右两部分,左半部分地基参数与前述一致,右半部分地基刚度取为 αK (α=0.5 ~ 5),其他参数保持不变,结构受力分析简图如图11所示.结构变形和内力随右半部分地基刚度 K 的变化如图12所示.

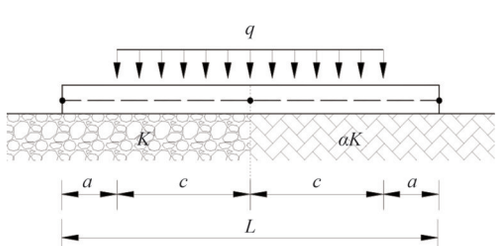
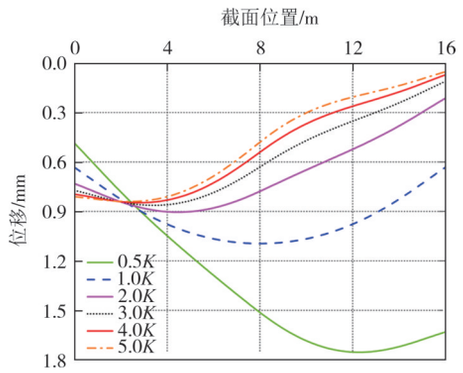


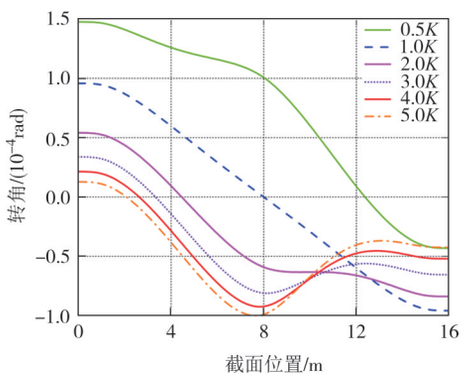
图 11 不均匀地基上轻型桥台受均布荷载作用

Fig.11 Abutment on variable foundation subjected to distributed load

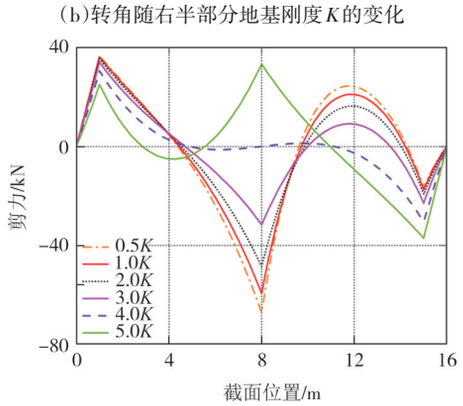
从图12可以看出,地基的不均匀性显著影响桥台的变形和内力分布.地基刚度较大的上卧桥台,其变形和转角相对较小,但剪力和弯矩的变化和分布则相对复杂.如图12(c)所示,右半部分地基刚度的变化改变了剪力分布.均匀地基的对称中心截面剪力为0,不均匀地基对称中心截面的剪力出现峰值,甚至超过左半部分最大剪力.图12(d)显示,弯矩分



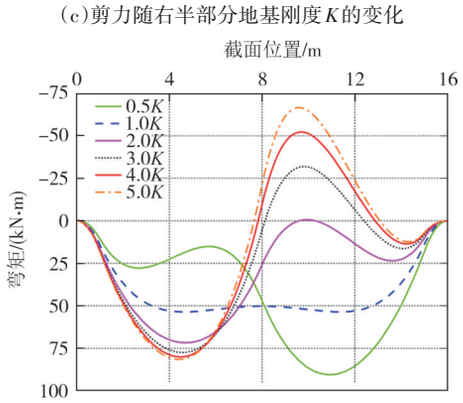
(a)挠度随右半部分地基刚度K的变化



(b)转角随右半部分地基刚度K的变化



(c)剪力随右半部分地基刚度K的变化



(d)弯矩随右半部分地基刚度K的变化

图 12　桥台右半部分地基刚度K变化时挠度、转角、剪力、弯矩的变化曲线

Fig.12　The variation curves of displacement、rotation、shear、moment against the variations of foundation stiffness K on the right part

布也发生变化，且出现负弯矩峰值．因此对于不均匀地基上的桥台，不能简单以最软或者最硬地基参数作为全台地基参数来计算内力，而应充分考虑地基不均匀性对内力和变形的分布及大小的影响．

5　结 论

1）本文提出的双参数地基Timoshenko梁理论分析轻型桥台自身平面内弯曲时，兼顾了桥台和地基的双重剪切效应，又可退化成Winkler地基Euler-Bernoulli梁、Winkler地基Timoshenko梁和双参数地基Euler-Bernoulli梁等经典理论，适用范围广，是一种综合性较强的计算模型．

2）轻型桥台自身平面内弯曲时，最大弯矩可能位于或偏离对称中心，教材《桥梁工程》[1-9]和文献[10-13]将对称中心截面弯矩作为弯矩设计值的简化方法存在安全隐患，建议摒弃，并完善补充轻型桥台自身平面内弯曲的分析理论．

3）ANSYS空间有限元分析验证了双参数地基Timoshenko梁模型的准确性，成功模拟了轻型桥台最大弯矩位于或偏离对称中心的现象．

4）地基不均匀性对桥台的变形和内力分布有显著影响．将地基均匀化处理，仅采用最软或最硬地基参数进行桥台弯曲分析，无法获取最大内力值，此计算设计方法存在安全隐患．

参考文献

[1]　姚玲森．桥梁工程[M]．3版．北京：人民交通出版社股份有限公司，2021：622-626．
YAO L S. Bridge engineering [M]. 3rd ed. Beijing: China Communications Press Co.,Ltd., 2021: 622-626.(in Chinese)

[2]　刘龄嘉．桥梁工程[M]．3版．北京：人民交通出版社股份有限公司，2020:346．
LIU L J. Bridge engineering [M]. 3rd ed. Beijing: China Communications Press Co.,Ltd.,2020: 346.(in Chinese)

[3]　李自林．桥梁工程[M]．2版．北京：机械工业出版社，2016：272-273．
LI Z L. Bridge engineering[M]. 2nd ed. Beijing: China Machine Press, 2016: 272-273.(in Chinese)

[4]　邵旭东．桥梁工程[M]．6版．北京：人民交通出版社股份有限公司，2023:570-571．
SHAO X D. Bridge engineering [M]. 6th ed. Beijing: China Communications Press Co.,Ltd., 2023: 570-571.(in Chinese)

[5]　李传习．桥梁工程[M]．北京：中国建筑工业出版社，2020：745-746．

LI C X. Bridge engineering[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2020: 745-746. (in Chinese)

[6] 周水兴. 桥梁工程[M]. 2版. 重庆: 重庆大学出版社, 2011: 522-524.
ZHOU S X. Bridge engineering[M]. 2nd ed. Chongqing: Chongqing University Press, 2011: 522-524. (in Chinese)

[7] 赵青, 李海涛. 桥梁工程[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2014: 460.
ZHAO Q, LI H T. Bridge engineering[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2014: 460. (in Chinese)

[8] 吴鸣, 金晓勤. 桥梁工程[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2020: 358-359.
WU M, JIN X Q. Bridge engineering[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2020: 358-359. (in Chinese)

[9] 罗旗帜. 桥梁工程[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2006: 105-106.
LUO Q Z. Bridge engineering[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 2006: 105-106. (in Chinese)

[10] 王慧东, 朱英磊. 桥梁墩台与基础工程[M]. 3版. 北京: 中国铁道出版社, 2020: 120-123.
WANG H D, ZHU Y L. Bridge pier and foundation engineering[M]. 3rd ed. Beijing: China Railway Publishing House, 2020: 120-123. (in Chinese)

[11] 盛洪飞. 桥梁墩台与基础工程[M]. 2版. 北京: 人民交通出版社, 2014: 68-69.
SHENG H F. Bridge pier and foundation engineering[M]. 2nd ed. Beijing: China Communications Press, 2014: 68-69. (in Chinese)

[12] 王荣霞, 彭大文. 墩台与基础[M]. 北京: 人民交通出版社, 2011: 65-66.
WANG R X, PENG D W. Pier and foundation[M]. Beijing: China Communications Press, 2011: 65-66. (in Chinese)

[13] 江祖铭, 王崇礼. 公路桥涵设计手册: 墩台与基础[M]. 北京: 人民交通出版社, 1994: 272-280.
JIANG Z M, WANG C L. Design handbook of highway bridges and culverts: pier and foundation [M]. Beijing: China Communications Press, 1994: 272-280. (in Chinese)

[14] PINNOLA F P, VACCARO M S, BARRETTA R, et al. Elasticity problems of beams on reaction-driven nonlocal foundation[J]. Archive of Applied Mechanics, 2023, 93(1): 41-71.

[15] DOEVA O, MASJEDI P K, WEAVER P M. Exact analytical solution for static deflection of Timoshenko composite beams on two-parameter elastic foundations[J]. Thin-Walled Structures, 2022, 172: 108812.

[16] 丁敏, 李静, 罗双, 等. 基于直接刚度法的弹性地基深梁单元[J]. 铁道学报, 2020, 42(5): 136-142.
DING M, LI J, LUO S, et al. Deep beam element on elastic foundation based on direct stiffness method[J]. Journal of the China Railway Society, 2020, 42(5): 136-142. (in Chinese)

[17] 李静, 蒋秀根, 王宏志, 等. 解析型弹性地基Timoshenko梁单元[J]. 工程力学, 2018, 35(2): 221-229.
LI J, JIANG X G, WANG H Z, et al. Analytical element for Timoshenko beam on elastic foundation [J]. Engineering Mechanics, 2018, 35(2): 221-229. (in Chinese)

[18] 夏桂云, 李传习. 考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008: 13-18.
XIA G Y, LI C X. Theory and application of bar structure considering shear deformation [M]. Beijing: China Communications Press, 2008: 13-18. (in Chinese)

[19] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981: 139-206.
HU H C. Variational principle of elasticity and its application [M]. Beijing: Science Press, 1981: 139-206. (in Chinese)

[20] 夏桂云, 李传习, 曾庆元. 轻型桥台自身平面内的弯曲分析与参数的合理取值[J]. 公路交通科技, 2010, 27(12): 53-58.
XIA G Y, LI C X, ZENG Q Y. Flexure analysis and parameter optimization of light type abutment in self-plane[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2010, 27(12): 53-58. (in Chinese)

[21] 陆培毅, 秦梦春, 杨建民, 等. Pasternak地基上Timoshenko梁内力与变形的有限差分法[J]. 地下空间与工程学报, 2022, 18(增刊1): 26-35.
LU P Y, QIN M C, YANG J M, et al. Finite difference method for internal forces and deformation of Timoshenko beam on Pasternak elastic foundation[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2022, 18(Sup.1): 26-35. (in Chinese)

[22] 夏桂云, 李传习, 曾庆元. 考虑双重剪切的弹性地基梁分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2011, 38(11): 19-24.
XIA G Y, LI C X, ZENG Q Y. Analysis for elastic foundation beam with double shear effect[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2011, 38(11): 19-24. (in Chinese)

[23] 顾晓鲁, 郑刚, 刘畅, 等. 地基与基础[M]. 4版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2019: 433-441.
GU X L, ZHENG G, LIU C, et al. Subgrade and foundation[M]. 4th ed. Beijing: China Architecture & Building Press, 2019: 433-441. (in Chinese)

[24] REDDY J N. On locking-free shear deformable beam finite elements [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 149(1/2/3/4): 113-132.

[25] PLAUT R H, DILLARD D A. Rigid wheel/roller on infinite beam or plate attached to Winkler, Pasternak, or elastomeric foundation [J]. International Journal of Solids and Structures, 2023, 262: 112001.

[26] 夏桂云, 曾庆元. 深梁理论的研究现状与工程应用[J]. 力学与实践, 2015, 37(3): 302-316.
XIA G Y, ZENG Q Y. Timoshenko beam theory and its applications [J]. Mechanics in Engineering, 2015, 37 (3): 302-316. (in Chinese)