文章编号:1000-1638(2026)05-0511-10 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20260507

耦合的Kostka-Foulkes多项式的组合公式*

尉安娜,颜昭雯
(内蒙古大学数学科学学院数学建模与科学计算重点实验室,呼和浩特 010030)

摘要:基于耦合的Hall-Littlewood多项式的顶点算子实现,定义了耦合的Kostka-Foulkes多项式,并推导出一系列组合公式。通过引入对称函数,给出了耦合的Hall-Littlewood多项式和Universal Characters的顶点算子表示。利用算子之间的交换关系,得到了耦合的Kostka-Foulkes多项式的显式表达式及其迭代公式。进一步讨论了耦合的Kostka-Foulkes多项式的稳定性,并针对若干特殊配分情形给出了简化计算公式。

关键词:耦合的Kostka-Foulkes多项式;耦合的Hall-Littlewood多项式;顶点算子;Universal Characters;Kostka-Foulkes多项式
中图分类号:O29 **文献标志码**:A

对称多项式在数学物理中具有重要作用,文献[1-2]给出了对称多项式在代数组合学的表示论、可积系统等领域中的应用。Miwa等[3]介绍了Schur函数和Schur Q-函数,它们是最基本的两种对称函数,分别是KP族和BKP族的τ函数。Koike[4]提出了Schur函数的一种推广形式,并将其称为Universal Character(UC)。Tsuda[5]构造了UC的顶点算子实现,并利用双线性恒等式定义了一个新的可积族(UC可积族),进一步证明了UC是UC可积族的解。Ogawa[6]构造了一个B型UC族(BUC族),并给出了该可积系统的一类解,即广义Q-函数,广义Q-函数可以看作推广的Schur Q-函数。Hall-Littlewood多项式$P_\mu(\boldsymbol{x};t)$含有参数t,当$t=0$和$t=-1$时,Hall-Littlewood多项式分别退化为Schur函数和Schur Q-函数。Jing[7]构造了Hall-Littlewood多项式的顶点算子实现,并给出了Hall-Littlewood多项式和Kostka-Foulkes多项式乘积的生成函数。Wang等[8]定义了耦合的Hall-Littlewood多项式,并给出了相应的顶点算子实现。此外,利用顶点算子得到了A模拓扑弦的平面配分。

Kirillov[9]介绍了Kostka-Foulkes多项式,它以一对配分λ和μ为指标,是Schur函数基和Hall-Littlewood多项式基之间的过渡系数,定义为

$$s_\lambda(\boldsymbol{x})=\sum_\mu K_{\lambda\mu}(t)P_\mu(\boldsymbol{x};t)$$

其中,$s_\lambda(\boldsymbol{x})$是Schur函数,$P_\mu(\boldsymbol{x};t)$是Hall-Littlewood多项式。通过几何模型,Lascoux等[10]证明了$K_{\lambda\mu}(t)$是非负整数系数多项式。Kirillov[11]得到了Kostka-Foulkes多项式的显式公式。Deka等[12]得到了关于$A_{n-1}^{(1)}$型无限制Kostka多项式的费米子公式。Can[13]推导出了钩形Kostka-Foulkes多项式的显式组合公式。Lecouvey等[14]从Kostka-Foulkes多项式关于Kostant配分的交错和表示出发,利用符

* **收稿日期**:2026-01-07;**修回日期**:2026-02-05
基金项目:国家自然科学基金项目(12461048);内蒙古自治区科技计划项目(2025KYPT0098)
作者简介:尉安娜(2001—),女(蒙古族),内蒙古赤峰人,2023级硕士研究生。E-mail:2484319573@qq.com
通信作者:颜昭雯(1985—),女,内蒙古巴彦淖尔人,教授,博士。主要从事孤子与可积系统的研究。E-mail:yanzw@imu.edu.cn

号反转对合构造了一个新的组合模型,并得到其关于Kostant配分的正展开。Bryan等[15]利用顶点算子实现研究了Kostka-Foulkes多项式的迭代公式。最近,Mvondo[16]研究了Kostka-Foulkes多项式与配分函数和可积系统之间的关系。本文旨在利用耦合的Hall-Littlewood多项式的顶点算子实现,构造耦合的Kostka-Foulkes多项式,并研究其相应的组合公式。

1 预备知识

首先回顾文献[1]中与对称函数相关的基本结论,并给出Schur函数和Hall-Littlewood多项式的顶点算子实现。随后引入Kostka-Foulkes多项式,该多项式是联系Schur函数基和Hall-Littlewood多项式基的过渡多项式[15]。

1.1 对称函数

配分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\cdots)$是一个仅有有限项非零的非增非负整数序列,即满足$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant\cdots$,其中非零的$\lambda_i$称为$\lambda$的一个部分,部分的个数被定义为一个配分的长度,记作$l(\lambda)$。部分的和称为配分的权,记作$|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2+\cdots$。如果$|\lambda|=n$,则称$\lambda$是$n$的一个配分,$n$的所有配分构成的集合记作$\mathcal{P}_n$。除了写成非增序列的形式,配分还可以写成$\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots r^{m_r}\cdots)$的形式,其中$m_r$是所有的正整数$r$出现的次数。配分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_i,\cdots)$的图被定义为第$i$行有$\lambda_i$个正方形的集合,每一行左对齐,读取时自上而下。对于两个配分λ和μ,如果满足λ的图包含μ的图,也就是对于所有的$i\geqslant1$满足$\lambda_i\geqslant\mu_i$,则称λ包含μ,记作$\lambda\supset\mu$。两个图的差值$\theta=\lambda-\mu$称为斜图,它是λ的图剔除μ的图的剩余部分。配分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$的一部分$\alpha=(\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_r})$被定义为$\lambda$的子配分,记作$\alpha\lhd\lambda$。定义$\lambda^{[i]}=(\lambda_{i+1},\lambda_{i+2},\cdots,\lambda_n)$,$\lambda^{(i)}=(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_{i-1}+1,\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_n)$,可以得到$\lambda^{[0]}=\lambda$,$\lambda^{[l]}=\varnothing$。

对于一个配分λ,定义

$$z_\lambda(t)=\frac{z_\lambda}{\prod\limits_{i\geqslant1}(1-t^{\lambda_i})}$$

其中,$z_\lambda=\prod\limits_{i\geqslant1}i^{m_i(\lambda)}m_i(\lambda)!$。当$\lambda=(n)$,可以得到$z_n(t)=\dfrac{n}{1-t^n}$。定义$n(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{l(\lambda)}(i-1)\lambda_i$,可以得到$n(\lambda^{[1]})-n(\lambda^{[i+1]})=|\lambda^{[i+1]}|$。

$\mathbb{Z}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$为由$n$个独立变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的整系数多项式构成的环。对称群$S_n$通过置换变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$作用在环$\mathbb{Z}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$上,如果环中的多项式变换后保持不变,也就是$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(n)})$,则称这个多项式为对称多项式,而整数域上的所有对称多项式构成环$\mathbb{Z}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$的子环,记作$\Lambda_n=\mathbb{Z}[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{S_n}$。

Λ_n可以分解成Λ_n^k直和的形式,即$\Lambda_n=\oplus\Lambda_n^k$,其中$\Lambda_n^k$是由$n$个变量的$k$阶齐次对称多项式形成的对称多项式环。齐次对称多项式是一类重要的对称多项式,对于变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$和n维向量空间$\mathbb{N}^n$中的$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,齐次对称多项式定义为

$$m_\lambda(\boldsymbol{x})=\sum_\alpha x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

其中,α是配分λ的不同排列。当λ取遍所有$l(\lambda)\leqslant n$的配分时,m_λ可以作为Λ_n的基。所有满足$l(\lambda)\leqslant n$,$|\lambda|=k$的M_λ构成了Λ_n^k的基。Λ_n是以m_λ为基底的对称多项式环。对于任意配分λ和μ,h_λ和m_μ满足正交关系,即$\langle h_\lambda,m_\mu\rangle=\delta_{\lambda\mu}$,其中,$h_\lambda$是完全对称函数,$h_r=\sum\limits_{|\lambda|=r}m_\lambda$,$\delta_{\lambda\mu}$是Kronecker δ记号。

Λ为无穷形式变量的对称函数环,其中每个元素只依赖有限个变量。幂和对称多项式是Λ在有理数域上的一组基,是关于无穷个变量$x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$的幂和对称多项式,定义为$p_k(\boldsymbol{x})=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_i^k+\cdots$。关于变量$y_1,y_2,\cdots,y_i,\cdots$的幂和对称多项式,定义为$p'_k(\boldsymbol{y})=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_i^k+\cdots$。下文中关于变量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的$k$阶幂和对称多项式分别记作$p_k$和$p'_k$。对于配分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,$p_\lambda=$

$p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_n}$,满足$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle=\delta_{\lambda\mu}z_\lambda(t)$,幂和对称函数是$\Lambda$上的正交基。

定义多项式$a_\alpha=a_\alpha(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\omega\in S_n}\varepsilon(\omega)\omega(\boldsymbol{x}^\alpha)$,其中$\varepsilon(\omega)$是排列$\omega$的符号$\pm1$。对于$\omega\in S_n$,有$\omega(a_\alpha)=\varepsilon(\omega)a_\alpha$。当$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$且$\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_n\geqslant0$时,可以将向量$\boldsymbol{\alpha}$写成$\boldsymbol{\alpha}=\lambda+\boldsymbol{\delta}$,其中$\lambda$是$l(\lambda)\leqslant n$的配分,$\boldsymbol{\delta}$是向量,$\boldsymbol{\delta}=(n-1,n-2,\cdots,1,0)$。此时多项式可以写成$a_\alpha=a_{\lambda+\delta}=\sum_\omega\varepsilon(\omega)\omega(x^{\lambda+\delta})$,也可以写成行列式的形式,即$a_{\lambda+\delta}=\det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$。

Schur函数是一类很重要的对称函数,对于变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$和配分λ满足$l(\lambda)\leqslant n$,定义次数为$|\lambda|$的Schur函数为

$$s_\lambda=s_\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}\tag{1}$$

Schur函数满足$\langle s_\lambda,s_\mu\rangle=\delta_{\lambda\mu}$,可以作为$\Lambda^{|\lambda|}$的一组标准正交基。

UC是Schur函数的推广,设$[\lambda,\mu]=[(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l),(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{l'})]$是一对配分,则UC定义为

$$S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\det\begin{pmatrix}h'_{\mu_{l'-i+1}+i-j}(\boldsymbol{y}), & 1\leqslant i\leqslant l'\\ h_{\lambda_{i-l'}-i+j}(\boldsymbol{x}), & l'+1\leqslant i\leqslant l+l'\end{pmatrix}_{1\leqslant i,j\leqslant l+l'}$$

其中,$l=l(\lambda),l'=l(\mu)$。$h_n(\boldsymbol{x})$和$h'_n(\boldsymbol{y})$的生成函数为

$$T(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(\boldsymbol{x})z^n=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n(\boldsymbol{x})}{n}z^n\right)$$

$$T'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h'_n(\boldsymbol{y})z^n=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p'_n(\boldsymbol{y})}{n}z^n\right)$$

构造算子

$$M(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\upsilon_nz^n=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n(\boldsymbol{x})}{n}z^n\right)\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial p'_n}z^n\right)\tag{2}$$

$$M'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\upsilon'_nz^n=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p'_n(\boldsymbol{y})}{n}z^n\right)\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial p_n}z^n\right)\tag{3}$$

可以得到

$$M(z)\cdot1=T(z),M'(z)\cdot1=T'(z)$$

展开可得

$$\upsilon_n\cdot1=h_n,\upsilon'_n\cdot1=h'_n$$

Hall-Littlewood多项式的变量在$x_1,x_2,\cdots,x_n$的基础上引入了t,定义为

$$W_\lambda(x_1,\cdots,x_n;t)=\sum_{\omega\in S_n/S_n^\lambda}w\left(x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}\prod_{\lambda_i>\lambda_j}\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j}\right)$$

其中,S_n^λ是满足$\lambda_{w(i)}=\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$的置换群,也是置换群$S_n$的子群,还可以写为

$$Q_\lambda(t)=b_\lambda(t)W_\lambda(t)\tag{4}$$

其中,$b_\lambda(t)=(1-t)^{l(\lambda)}\prod_{i\geqslant1}[m_i(\lambda)]!$。

定义

$$[n]=\frac{1-t^n}{1-t}=1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}$$

规定$[0]=1$,则$[n]!=[n][n-1]\cdots[1]$,$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$。Hall-Littlewood多项式是$\Lambda^{|\lambda|}$的基。

1.2 Kostka-Foulkes多项式

对称函数$q_n(\boldsymbol{x};t)$的生成函数为

$$\sum_{n\geqslant 0}q_n(\boldsymbol{x};t)z^n=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^n}{n}p_nz^n\right)$$

配分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,定义$q_\lambda=q_{\lambda_1}q_{\lambda_2}\cdots q_{\lambda_n}$。Hall-Littlewood多项式$H(z)$及其对偶$H^*(z)$的顶点算子定义为

$$H(z)=\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1-t^n}{n}p_nz^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}H_nz^n \tag{5}$$

$$H^*(z)=\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{1-t^n}{n}p_nz^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}H_n^*z^{-n} \tag{6}$$

命题1[7] 给定配分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,顶点算子$H_\lambda\cdot 1$生成的Hall-Littlewood多项式$Q_\lambda(t)$为

$$H_\lambda\cdot 1=H_{\lambda_1}H_{\lambda_2}\cdots H_{\lambda_l}\cdot 1=\prod_{i<j}\frac{1-R_{ij}}{1-tR_{ij}}q_{\lambda_1}q_{\lambda_2}\cdots q_{\lambda_l}=Q_\lambda(t) \tag{7}$$

其中,提升算子R_{ij}定义为$R_{ij}q(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)=q\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_i+1,\cdots,\lambda_j-1,\cdots,\lambda_l\right)$。

注1 当式(5)取$t=0$时,$H(z)$退化为Schur函数的顶点算子表示$S(z)$。同时引入其相应的对偶算子$S^*(z)$为

$$S(z)=\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}p_nz^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}S_nz^n$$

$$S^*(z)=\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{1-t^n}{n}p_nz^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1-t^n}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}S_n^*z^{-n}$$

命题2[7] 给定配分$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_l)$,顶点算子$S_\mu\cdot 1$生成的Schur函数$s_\mu(\boldsymbol{x})$为

$$S_\mu\cdot 1=S_{\mu_1}S_{\mu_2}\cdots S_{\mu_l}\cdot 1=\prod_{i<j}(1-R_{ij})s_{\mu_1}s_{\mu_2}\cdots s_{\mu_l}=s_\mu(\boldsymbol{x})$$

定义1[10] 对于一对配分λ和μ,Kostka-Foulkes多项式$K_{\lambda\mu}(t)$定义为

$$s_\lambda(\boldsymbol{x})=\sum_\mu\frac{1}{b_\mu(t)}K_{\lambda\mu}(t)Q_\mu(\boldsymbol{x};t)$$

其中,$s_\lambda(\boldsymbol{x})$是式(1)中的Schur函数,$Q_\mu(\boldsymbol{x};t)$是式(4)中的Hall-Littlewood多项式。Kostka-Foulkes多项式$K_{\lambda\mu}(t)$是由Λ_n空间中的两类基底(Schur函数和Hall-Littlewood多项式)产生的过渡多项式,可以写为

$$K_{\lambda\mu}(t)=\left\langle S_\lambda\cdot 1,H_\mu\cdot 1\right\rangle \tag{8}$$

2 耦合的Kostka-Foulkes多项式

本节利用耦合的Hall-Littlewood多项式的顶点算子实现,构造耦合的Kostka-Foulkes多项式。利用算子之间的交换关系,可以得到耦合的Kostka-Foulkes多项式的组合公式,进一步证明耦合的Kostka-Foulkes多项式具有稳定性,并给出特殊配分下的一些简化公式。

2.1 耦合的Hall-Littlewood多项式和UC的顶点算子实现

定义2 定义顶点算子$U^+(z)$、$V^+(z)$及其对偶算子$U^-(z)$、$V^-(z)$为

$$U^+(z)=\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{p_n}{n}-\frac{\partial}{\partial p_n'}\right)z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\geqslant 1}U_n^+z^n \tag{9}$$

$$U^-(z)=\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{p_n}{n}-\frac{\partial}{\partial p_n'}\right)z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\geqslant 1}U_n^-z^n \tag{10}$$

$$V^+(z)=\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{p'_n}{n}-\frac{\partial}{\partial p_n}\right)z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\geqslant 1}V_n^+z^n \tag{11}$$

$$V^-(z)=\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{p'_n}{n}-\frac{\partial}{\partial p_n}\right)z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\geqslant 1}V_n^-z^n \tag{12}$$

命题 3　算子$U_n^{\pm}$、$V_n^{\pm}$满足以下关系

$$U_m^+U_n^++U_{n-1}^+U_{m+1}^+=0,\ V_m^+V_n^++V_{n-1}^+V_{m+1}^+=0,$$
$$U_m^-U_n^-+U_{n-1}^-U_{m+1}^-=0,\ V_m^-V_n^-+V_{n-1}^-V_{m+1}^-=0,$$
$$U_m^+U_n^-+U_{n+1}^-U_{m-1}^+=\delta_{m+n,0},\ V_m^+V_n^-+V_{n+1}^-V_{m-1}^+=\delta_{m+n,0},$$

其中,算子$U_i^{\pm}$和$V_i^{\pm}$可交换。

命题 4　一系列算子$U_i^{\pm}$和$V_i^{\pm}$作用在常数1上可以生成UC,表示为

$$S_{[\lambda,\mu]}(x,y)=U_{\lambda_1}^+U_{\lambda_2}^+\cdots U_{\lambda_l}^+V_{\mu_1}^+V_{\mu_2}^+\cdots V_{\mu_{l'}}^+\cdot 1$$

其中,$[\lambda,\mu]$是一对配分且满足$l(\lambda)=l,l(\mu)=l'$。

命题 5　算子$U_i^{\pm}$、$V_i^{\pm}$、υ_n、υ'_n的交换关系为

$$U_m^+\upsilon_n=\upsilon_nU_m^+-\upsilon_{n-1}U_{m+1}^+,\ U_m^+\upsilon'_n=\upsilon'_nU_m^+ \tag{13}$$

$$V_m^+\upsilon_n=\upsilon_nV_m^+,\ V_m^+\upsilon'_n=\upsilon'_nV_m^+-\upsilon'_{n-1}V_{m+1}^+ \tag{14}$$

证明　由式(2)和式(9)可以得到

$$\begin{aligned}U^+(z)M(w)=&\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{p_n}{n}z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{p_n}{n}w^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}w^n\right)\\&\exp\left[-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n},\sum_{n\geqslant 1}\frac{p_n}{n}w^n\right]\\=&:U^+(z)M(w):\left(1-\frac{w}{z}\right)\end{aligned}$$

$$M(w)U^+(z)=:U^+(z)M(w):$$

所以有

$$U^+(z)M(w)=\left(1-\frac{w}{z}\right)M(w)U^+(z)$$

比较两端z^mw^n的系数,可以得到式(13)中的第一个交换关系。代入式(3)和式(9)得到

$$\begin{aligned}U^+(z)M'(w)=&\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{p_n}{n}z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{p'_n}{n}w^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}w^n\right)\\&\exp\left[-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}z^n,\sum_{n\geqslant 1}\frac{p'_n}{n}w^n\right]\\=&:U^+(z)M'(w):(1-zw)\end{aligned}$$

$$M'(w)U^+(z)=:U^+(z)M'(w):(1-zw)$$

因此

$$U^+(z)M'(w)=M'(w)U^+(z)$$

比较两端z^mw^n的系数,可以得到式(13)中的第二个交换关系。用同样的方法可以得到式(14)中的交换关系。

定义 3　定义耦合的Hall-Littlewood多项式的顶点算子$X^+(z)$、$Y^+(z)$及其对偶算子$X^-(z)$、$Y^-(z)$为

$$X^+(z)=\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\left(\frac{p_n}{n}-\frac{\partial}{\partial p'_n}\right)z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\geqslant 1}X_n^+z^n \tag{15}$$

$$X^-(z)=\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\left(\frac{p_n}{n}-\frac{\partial}{\partial p'_n}\right)z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\geqslant 1}X_n^-z^{-n} \tag{16}$$

$$Y^+(z)=\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\left(\frac{p'_n}{n}-\frac{\partial}{\partial p_n}\right)z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\geqslant 1}Y_n^+z^n \tag{17}$$

$$Y^-(z)=\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\left(\frac{p'_n}{n}-\frac{\partial}{\partial p_n}\right)z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}z^{-n}\right)=\sum_{n\geqslant 1}Y_n^-z^{-n} \tag{18}$$

当$t=0$时,$X^+(z)$和$Y^+(z)$可以退化为式(9)和式(11)中的$U^+(z)$和$V^+(z)$,易得

$$X_{-n}^+\cdot 1=\delta_{n,0},\ Y_{-n}^+\cdot 1=\delta_{n,0}$$
$$X_n^-\cdot 1=\delta_{n,0},\ Y_n^-\cdot 1=\delta_{n,0}$$

命题6 算子$X_i^{\pm}$和$Y_i^{\pm}$满足以下的交换关系

$$X_m^+X_n^+-tX_n^+X_m^+=tX_{m+1}^+X_{n-1}^+-X_{n-1}^+X_{m+1}^+,\ Y_m^+Y_n^+-tY_n^+Y_m^+=tY_{m+1}^+Y_{n-1}^+-Y_{n-1}^+Y_{m+1}^+$$
$$X_m^-X_n^--tX_n^-X_m^-=tX_{m-1}^-X_{n+1}^--X_{n+1}^-X_{m-1}^-,\ Y_m^-Y_n^--tY_n^-Y_m^-=tY_{m-1}^-Y_{n+1}^--Y_{n+1}^-Y_{m-1}^-$$
$$X_m^+X_n^--tX_n^-X_m^+=tX_{m-1}^+X_{n-1}^--X_{n-1}^-X_{m-1}^++(1-t)^2\delta_{m,n}$$
$$Y_m^+Y_n^--tY_n^-Y_m^+=tY_{m-1}^+Y_{n-1}^--Y_{n-1}^-Y_{m-1}^++(1-t)^2\delta_{m,n}$$

其中,$X_i^{\pm}$和$Y_i^{\pm}$可交换。

命题7 给定一对配分λ和μ满足$l(\lambda)=l,l(\mu)=l'$,算子$X_i^{\pm}$和$Y_i^{\pm}$生成耦合的Hall-Littlewood多项式为

$$Q_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=X_{\lambda_1}^+X_{\lambda_2}^+\cdots X_{\lambda_l}^+Y_{\mu_1}^+Y_{\mu_2}^+\cdots Y_{\mu_{l'}}^+\cdot 1$$

当$\mu=\varnothing$时,耦合的Hall-Littlewood多项式退化为式(7)。

命题8 算子$U_i^{\pm}$、$V_i^{\pm}$、$X_i^{\pm}$和$Y_i^{\pm}$之间满足如下交换关系

$$X_m^-U_n^+=t^{-1}U_n^+X_m^-+t^{-1}X_{m-1}^-U_{n-1}^++(t^{n-m}-t^{n-m-1})\upsilon_{n-m} \tag{19}$$

$$Y_m^-V_n^+=t^{-1}V_n^+Y_m^-+t^{-1}Y_{m-1}^-V_{n-1}^++(t^{n-m}-t^{n-m-1})\upsilon'_{n-m} \tag{20}$$

$$X_m^-V_n^+=V_n^+X_m^- \tag{21}$$

$$Y_m^-U_n^+=U_n^+Y_m^- \tag{22}$$

证明 根据式(9)和式(16),可以得到

$$\begin{aligned}X^-(z)U^+(w)=&\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{p_n}{n}z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{p_n}{n}w^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{\partial}{\partial p'_n}z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)\\&\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}w^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}w^{-n}\right)\exp\left[\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{p_n}{n}w^n\right]\\=&:X^-(z)U^+(w):\left(\frac{z}{z-w}\right)\end{aligned}$$

另一方面,有

$$\begin{aligned}U^+(w)X^-(z)=&\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{p_n}{n}w^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{p_n}{n}z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}w^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}w^{-n}\right)\\&\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{\partial}{\partial p'_n}z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)\exp\left[-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}w^{-n},-\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{p_n}{n}z^n\right]\\=&:X^-(z)U^+(w):\left(\frac{w-tz}{w-z}\right)\end{aligned}$$

可得

$$X^-(z)U^+(w)\frac{w-tz}{z}+U^+(w)X^-(z)=(1-t):X^-(z)U^+(w):\delta\left(\frac{w}{z}\right)=(1-t)M(tz)\delta\left(\frac{w}{z}\right)$$

比较两端$z^{-m-1}w^{n+1}$的系数可以得到式(19)。又由

$$X^-(z)V^+(w)=\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{p_n}{n}z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{p'_n}{n}w^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{\partial}{\partial p'_n}z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)$$
$$\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}w^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}w^{-n}\right)\exp\left[\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{\partial}{\partial p'_n}z^n,\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{p'_n}{n}w^n\right]$$
$$=:X^-(z)V^+(w):\left(\frac{1-twz}{1-wz}\right)$$
$$V^+(w)X^-(z)=\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{p'_n}{n}w^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{p_n}{n}z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}w^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p'_n}w^{-n}\right)$$
$$\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{\partial}{\partial p'_n}z^n\right)\exp\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)\exp\left[-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial}{\partial p_n}w^n,\ -\sum_{n\geqslant 1}(1-t^n)\frac{p_n}{n}z^n\right]$$
$$=:X^-(z)V^+(w):\left(\frac{1-twz}{1-wz}\right)$$

可得$X^-(z)V^+(w)=V^+(w)X^-(z)$，比较两端$z^{-m}w^n$的系数可以得到式(21)，同理可证式(20)和式(22)。

2.2　耦合的Kostka-Foulkes多项式的组合公式

定义4　给定两对配分$[\lambda,\nu]$和$[\mu,\xi]$，其中$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{n'})$，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)$，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{m'})$。耦合的Kostka-Foulkes多项式定义为

$$K^{[\nu,\xi]}_{[\lambda,\mu]}(t)=\left\langle U^+_\lambda V^+_\mu\cdot 1, X^+_\nu Y^+_\xi\cdot 1\right\rangle$$

定理1　耦合的Kostka-Foulkes多项式满足

$$K^{[\nu,\xi]}_{[\lambda,\mu]}(t)=K_{\lambda\nu}(t)K_{\mu\xi}(t)\tag{23}$$

其中，$K_{\lambda\nu}(t)$和$K_{\mu\xi}(t)$是式(8)中定义的Kostka-Foulkes多项式。

证明　根据定义4，可得

$$K^{[\nu,\xi]}_{[\lambda,\mu]}(t)=\left\langle U^+_\lambda V^+_\mu\cdot 1, X^+_\nu Y^+_\xi\cdot 1\right\rangle=\left\langle X^-_\nu U^+_\lambda V^+_\mu\cdot 1, Y^+_\xi\cdot 1\right\rangle$$
$$=\left\langle V^+_\mu X^-_\nu U^+_\lambda\cdot 1, Y^+_\xi\cdot 1\right\rangle=K_{\lambda\nu}(t)\left\langle V^+_\mu\cdot 1, Y^+_\xi\cdot 1\right\rangle=K_{\lambda\nu}(t)K_{\mu\xi}(t)$$

命题9　对于配分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{l'})$和正整数$k$，有

$$X^-_k U^+_\lambda=\sum_{i=1}^{l}(-1)^{i-1}t^{\lambda_i-k-i+1}\upsilon_{\lambda_i-k-i+1}U^+_{\lambda^{(i)}}\tag{24}$$

$$Y^-_k V^+_\mu=\sum_{i=1}^{l'}(-1)^{i-1}t^{\mu_i-k-i+1}\upsilon'_{\mu_i-k-i+1}V^+_{\mu^{(i)}}\tag{25}$$

证明　利用数学归纳法，配分$\lambda^{[1]}=(\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_l)$和$\tilde{\lambda}=(\lambda_1-1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$满足

$$X^-_k U^+_{\lambda_2}U^+_{\lambda_3}\cdots U^+_{\lambda_l}=t^{\lambda_2-k}\upsilon_{\lambda_2-k}U^+_{\lambda_3}\cdots U^+_{\lambda_l}-t^{\lambda_3-k-1}\upsilon_{\lambda_3-k-1}U^+_{\lambda_2+1}U^+_{\lambda_4}\cdots U^+_{\lambda_l}+\cdots$$
$$X^-_{k-1}U^+_{\lambda_1-1}U^+_{\lambda_2}\cdots U^+_{\lambda_l}=t^{\lambda_1-k}\upsilon_{\lambda_1-k}U^+_{\lambda_2}\cdots U^+_{\lambda_l}-t^{\lambda_2-k}\upsilon_{\lambda_2-k}U^+_{\lambda_1}U^+_{\lambda_3}\cdots U^+_{\lambda_l}+\cdots$$
$$U^+_{\lambda_1}\upsilon_{\lambda_2-k}=\upsilon_{\lambda_2-k}U^+_{\lambda_1}-\upsilon_{\lambda_2-k-1}U^+_{\lambda_1+1},\ U^+_{\lambda_1}\upsilon_{\lambda_3-k-1}=\upsilon_{\lambda_3-k-1}U^+_{\lambda_1}-\upsilon_{\lambda_3-k-2}U^+_{\lambda_1+1}$$

对配分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$，则有

$$X^-_k U^+_{\lambda_1}U^+_{\lambda_2}\cdots U^+_{\lambda_l}=t^{-1}U^+_{\lambda_1}X^-_k U^+_{\lambda_2}\cdots U^+_{\lambda_l}+t^{-1}X^-_{k-1}U^+_{\lambda_1-1}U^+_{\lambda_2}\cdots U^+_{\lambda_l}+(t^{\lambda_1-k}-t^{\lambda_1-k-1})\upsilon_{\lambda_1-k}U^+_{\lambda_2}\cdots U^+_{\lambda_l}$$
$$=t^{-1}U^+_{\lambda_1}(t^{\lambda_2-k}\upsilon_{\lambda_2-k}U^+_{\lambda_3}\cdots U^+_{\lambda_l}-t^{\lambda_3-k-1}\upsilon_{\lambda_3-k-1}U^+_{\lambda_2+1}U^+_{\lambda_4}\cdots U^+_{\lambda_l}+\cdots)$$
$$+t^{-1}(t^{\lambda_1-k}\upsilon_{\lambda_1-k}U^+_{\lambda_2}\cdots U^+_{\lambda_l}-t^{\lambda_2-k}\upsilon_{\lambda_2-k}U^+_{\lambda_1}U^+_{\lambda_3}\cdots U^+_{\lambda_l}+\cdots)$$
$$+(t^{\lambda_1-k}-t^{\lambda_1-k-1})\upsilon_{\lambda_1-k}U^+_{\lambda_2}\cdots U^+_{\lambda_l}$$
$$=t^{\lambda_1-k}\upsilon_{\lambda_1-k}U^+_{\lambda_2}\cdots U^+_{\lambda_l}-t^{\lambda_2-k-1}\upsilon_{\lambda_2-k-1}U^+_{\lambda_1+1}U^+_{\lambda_3}\cdots U^+_{\lambda_l}$$
$$+t^{\lambda_3-k-2}\upsilon_{\lambda_3-k-2}U^+_{\lambda_1+1}U^+_{\lambda_2+1}U^+_{\lambda_4}\cdots U^+_{\lambda_l}+\cdots$$

同理可证式(25)。

根据式(19)和式(20)易得,当$n>|\lambda|, m>|\mu|$时有

$$X_n^- U_{\lambda_1}^+ U_{\lambda_2}^+ \cdots U_{\lambda_l}^+ \cdot 1 = 0,\ Y_m^- V_{\mu_1}^+ V_{\mu_2}^+ \cdots V_{\mu_{l'}}^+ \cdot 1 = 0$$

基于以上的命题和定理,下面给出耦合的Kostka-Foulkes多项式的组合公式。

定理 2 配分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,$\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{n'})$满足$|\lambda|=|\nu|$,配分$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)$,$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{m'})$满足$|\mu|=|\xi|$,有以下组合公式

$$K_{[\lambda,\mu]}^{[\nu,\xi]}(t)=\sum_{i=1}^{l(\lambda)}\sum_{j=1}^{l(\mu)}(-1)^{i+j-2}t^{\lambda_i+\mu_j-\nu_1-\xi_1-i-j+2}\sum_{\alpha^i,\beta^j}K_{[\alpha^i,\beta^j]}^{[\nu^{[1]},\xi^{[1]}]}(t) \tag{26}$$

其中,$\nu^{[1]}=(\nu_2,\nu_3,\cdots,\nu_n)$,$\xi^{[1]}=(\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n)$,$\alpha^i-\lambda^{(i)}$是长度为$\lambda_i-\nu_1-i+1$的水平带,$\beta^i-\mu^{(i)}$是长度为$\mu_i-\xi_1-i+1$的水平带。

证明 根据式(23)—(25),可得

$$\begin{aligned}
K_{[\lambda,\mu]}^{[\nu,\xi]}(t)&=\left\langle U_{\lambda_1}^+U_{\lambda_2}^+\cdots U_{\lambda_n}^+V_{\mu_1}^+V_{\mu_2}^+\cdots V_{\mu_m}^+\cdot 1, X_{\nu_1}^+X_{\nu_2}^+\cdots X_{\nu_{n'}}^+Y_{\xi_1}^+Y_{\xi_2}^+\cdots Y_{\xi_{m'}}^+\cdot 1\right\rangle\\
&=\left\langle X_{\nu_1}^-U_{\lambda_1}^+U_{\lambda_2}^+\cdots U_{\lambda_n}^+\cdot 1, X_{\nu_2}^+\cdots X_{\nu_{n'}}^+\cdot 1\right\rangle\left\langle Y_{\xi_1}^-V_{\mu_1}^+V_{\mu_2}^+\cdots V_{\mu_m}^+\cdot 1, V_{\xi_2}^+\cdots V_{\xi_{m'}}^+\cdot 1\right\rangle\\
&=\left\langle\sum_{i=1}^{l(\lambda)}(-1)^{i-1}t^{\lambda_i-\nu_1-i+1}\upsilon_{\lambda_i-\nu_1-i+1}U_{\lambda^{(i)}}^+\cdot 1, X_{\nu_2}^+\cdots X_{\nu_{n'}}^+\cdot 1\right\rangle\cdot\\
&\quad\left\langle\sum_{j=1}^{l(\mu)}(-1)^{j-1}t^{\mu_j-\xi_1-j+1}\upsilon'_{\mu_j-\xi_1-j+1}V_{\mu^{(j)}}^+\cdot 1, Y_{\xi_2}^+\cdots Y_{\xi_{m'}}^+\cdot 1\right\rangle\\
&=\sum_{i=1}^{l(\lambda)}\sum_{j=1}^{l(\mu)}(-1)^{i+j-2}t^{\lambda_i+\mu_j-\nu_1-\xi_1-i-j+2}\left\langle\upsilon_{\lambda_i-\nu_1-i+1}U_{\lambda^{(i)}}^+\cdot 1, X_{\nu^{[1]}}^+\cdot 1\right\rangle\left\langle\upsilon'_{\mu_j-\xi_1-j+1}V_{\mu^{(j)}}^+\cdot 1, Y_{\xi^{[1]}}^+\cdot 1\right\rangle
\end{aligned}$$

再结合Pieri法则,定理2得证。

2.3 耦合的Kostka-Foulkes多项式的性质和简化公式

耦合的Kostka-Foulkes多项式具有稳定性,有以下命题。

命题 10 配分λ、μ、ν、ξ满足$\nu_1\geqslant\lambda_2$,$\xi_1\geqslant\mu_2$,对于正整数$r\geqslant 1$,$r'\geqslant 1$,耦合的Kostka-Foulkes多项式满足以下关系

$$K_{[\lambda+(r),\mu+(r')]}^{[\nu+(r),\xi+(r')]}(t)=K_{[\lambda,\mu]}^{[\nu,\xi]}(t),\lambda+(r)=(\lambda_1+r,\lambda_2,\cdots)$$

证明 由式(24)和式(25)可得

$$\begin{aligned}
K_{[\lambda+(r),\mu+(r')]}^{[\nu+(r),\xi+(r')]}(t)&=K_{\lambda+(r),\nu+(r)}(t)K_{\mu+(r'),\xi+(r')}(t)\\
&=\left(t^{\lambda_1-\nu_1}\left\langle\upsilon_{\lambda_1-\nu_1}U_{\lambda^{(1)}}^+\cdot 1, X_{\nu^{[1]}}^+\cdot 1\right\rangle\right)\cdot\left(t^{\mu_1-\xi_1}\left\langle\upsilon'_{\mu_1-\xi_1}V_{\mu^{(1)}}^+\cdot 1, Y_{\xi^{[1]}}^+\cdot 1\right\rangle\right)\\
&=K_{[\lambda,\mu]}^{[\nu,\xi]}(t)
\end{aligned}$$

对于耦合的Kostka-Foulkes多项式,式(26)给出了一般的组合公式。对于一些特殊的配分可以得到一些简化的公式以方便计算。

对于两对配分λ,μ和ν,ξ,有以下简化公式:

① 当$\nu=(n)$时,可得$K_{[\lambda,\mu]}^{[(n),\xi]}(t)=\delta_{\lambda,(n)}K_{\mu\xi}(t)$。

② 当$\xi=(m)$时,可得$K_{[\lambda,\mu]}^{[\nu,(m)]}(t)=\delta_{\mu,(m)}K_{\lambda\nu}(t)$。

③ 当$\lambda=(n)$时,可得$K_{[(n),\mu]}^{[\nu,\xi]}(t)=t^{n(\nu)}K_{\mu\xi}(t)$。

④ 当$\mu=(m)$时,可得$K_{[\lambda,(m)]}^{[\nu,\xi]}(t)=t^{n(\xi)}K_{\lambda\nu}(t)$。

⑤ 当$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$时,可得$K_{[(\lambda_1,\lambda_2),\mu]}^{[\nu,\xi]}(t)=t^{\lambda_1-\nu_1}\left(K_{[(\lambda_1-\nu_1+\lambda_2),\mu]}^{[\nu^{[1]},\xi]}(t)+K_{[(\lambda_1-\nu_1+\lambda_2-1,1),\mu]}^{[\nu^{[1]},\xi]}(t)+\cdots+K_{[(\lambda_1-\nu_1,\lambda_2),\mu]}^{[\nu^{[1]},\xi]}(t)\right)-t^{\lambda_2-\nu_1-1}\left(K_{[(\lambda_1-\nu_1+\lambda_2),\mu]}^{[\nu^{[1]},\xi]}(t)+K_{[(\lambda_1-\nu_1+\lambda_2-1,1),\mu]}^{[\nu^{[1]},\xi]}(t)+\cdots+K_{[(\lambda_1+1,\lambda_2-\nu_1-1),\mu]}^{[\nu^{[1]},\xi]}(t)\right)$。

⑥ 当$\mu=(\mu_1,\mu_2)$时,可得$K_{[\lambda,(\mu_1,\mu_2)]}^{[\nu,\xi]}(t)=t^{\mu_1-\xi_1}\left(K_{[\lambda,(\mu_1-\xi_1+\mu_2)]}^{[\nu,\xi^{[1]}]}(t)+K_{[\lambda,(\mu_1-\xi_1+\mu_2-1,1)]}^{[\nu,\xi^{[1]}]}(t)+\cdots+K_{[\lambda,(\mu_1-\xi_1,\mu_2)]}^{[\nu,\xi^{[1]}]}(t)\right)-t^{\mu_2-\xi_1-1}\left(K_{[\lambda,(\mu_1-\xi_1+\mu_2)]}^{[\nu,\xi^{[1]}]}(t)+K_{[\lambda,(\mu_1-\xi_1+\mu_2-1,1)]}^{[\nu,\xi^{[1]}]}(t)+\cdots+K_{[\lambda,(\mu_1+1,\mu_2-\xi_1-1)]}^{[\nu,\xi^{[1]}]}(t)\right)$。

⑦ 当$\lambda=(n-k,1^k)$时，可得$K^{[\nu,\xi]}_{[(n-k,1^k),\mu]}(t)=t^{n(\nu)+\frac{k(k+1-2l)}{2}}\begin{bmatrix}l-1\\k\end{bmatrix}K_{\mu\xi}(t)$，其中$n=|\nu|,l=l(\nu)$且满足$(n-k,1^k)\geqslant\nu$。

⑧ 当$\mu=(m-k,1^k)$时，可得$K^{[\nu,\xi]}_{[\lambda,(m-k,1^k)]}(t)=t^{n(\xi)+\frac{k(k+1-2l)}{2}}\begin{bmatrix}l-1\\k\end{bmatrix}K_{\lambda\nu}(t)$，其中$m=|\xi|,l=l(\xi)$且满足$(m-k,1^k)\geqslant\xi$。

⑨ 当$\nu=(1^n)$时，可得$K^{[(1^n),\xi]}_{[\lambda,\mu]}(t)=t^{n(\lambda')}\dfrac{[n]!}{\prod\limits_{x\in\lambda}[h(x)]}K_{\mu\xi}(t)$，其中$h(x)=\lambda_i+\lambda'_j-i-j+1$。

⑩ 当$\xi=(1^m)$时，可得$K^{[\nu,(1^m)]}_{[\lambda,\mu]}(t)=t^{n(\mu')}\dfrac{[m]!}{\prod\limits_{x\in\mu}[h(x)]}K_{\lambda\nu}(t)$，其中$h(x)=\mu_i+\mu'_j-i-j+1$。

3　小结

基于耦合的Hall-Littlewood多项式和UC的顶点算子实现，重点研究了耦合的Kostka-Foulkes多项式。根据算子之间的交换关系，给出了一系列组合公式，证明了其稳定性，并给出了耦合的Kostka-Foulkes多项式的简化公式。Jing等[17]研究了自旋的Kostka多项式$K^-_{\xi\mu}(t)$，$K^-_{\xi\mu}(t)$是Schur-Q函数$Q_\xi(\boldsymbol{x})$和Hall-Littlewood多项式$P_\mu(\boldsymbol{x};t)$之间的过渡系数，满足$Q_\xi(\boldsymbol{x})=\sum\limits_\mu K^-_{\xi\mu}(t)P_\mu(\boldsymbol{x};t)$。后续工作将利用对称多项式和表示理论，讨论广义Q-函数与耦合的Hall-Littlewood多项式之间的过渡多项式的相关组合结构和性质。

参考文献：

[1] Macdonald I G. Symmetric functions and hall polynomials[M]. Oxford：Oxford Science Publications，1995.

[2] Weyl H. The classical groups：Their invariants and representations[M]. Princeton：Princeton University Press，1966.

[3] Miwa T，Jimbo M，Date E. Solitons：Differential equations，symmetries and infinite dimensional algebras[M]. Cambridge：Cambridge University Press，2000.

[4] Koike K. On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups：By means of the universal characters[J]. Advances in Mathematics，1989，74(1)：57-86.

[5] Tsuda T. Universal characters and an extension of the KP hierarchy[J]. Communications in Mathematical Physics，2004，248(3)：501-526.

[6] Ogawa Y. Generalized Q-functions and UC hierarchy of B-type[J]. Tokyo Journal of Mathematics，2009，32(2)：349-380.

[7] Jing N H. Vertex operators and Hall-Littlewood symmetric functions[J]. Advances in Mathematics，1991，87(2)：226-248.

[8] Wang N，Li C Z. Coupled Hall-Littlewood functions，vertex operators and the q-boson model[PP/OL]. V1. arXiv(2017-12-14)[2025-12-11]. https：//doi. org/10. 48550/arXiv. 1712. 05093.

[9] Kirillov A N. Ubiquity of Kostka polynomials[PP/OL]. V1. arXiv(1999-12-12)[2025-12-11]. https：//doi. org/10. 48550/arXiv. math/9912094.

[10] Lascoux A，Schützenberger M P. Sur une conjecture de H. O. Foulkes[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences，1978，286：323-324.

[11] Kirillov A N. On the Kostka-Green-Foulkes polynomials and Clebsch-Gordan numbers[J]. Journal of Geometry and Physics,1988,5(3):365-389.

[12] Deka L P A,Schilling A. New fermionic formula for unrestricted Kostka polynomials[J]. Journal of Combinatorial Theory Series A,2006,113(7):1435-1461.

[13] Can M B. Some plethystic identities and Kostka-Foulkes polynomials[J]. Ars Combinatoria,2015,122:411-421.

[14] Lecouvey C,Lenart C,Schultze A. Towards a combinatorial model for q-weight multiplicities of simple Lie algebras: Extended abstract[PP/OL]. V2. arXiv(2022-02-15)[2025-12-11]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.15394.

[15] Bryan T W,Jing N H. An iterative formula for the Kostka-Foulkes polynomials[J]. Journal of Algebraic Combinatorics,2021,54(2):625-634.

[16] Mvondo S Y. On palindromic numerators of bigraded symmetric orbifold Hilbert series and Kostka-Foulkes polynomials[J]. Physics Letters B,2026,873:140127.

[17] Jing N H,Liu N. Spin kostka polynomials and vertex operators[J]. Pacific Journal of Mathematics,2023,325(1):127-146.

(责任编委 李 宏)

Combinatorial Formulas for Coupled Kostka-Foulkes Polynomials

YU Anna,YAN Zhaowen

(*Key Laboratory of Mathematical Modeling and Scientific Computing*, *School of Mathematical Sciences*, *Inner Mongolia University*, *Hohhot* 010030, *China*)

Abstract: Based on the vertex operator realization of the coupled Hall-Littlewood polynomial, the coupled Kostka-Foulkes polynomials is defined and a series of combinatorial formulas are derived. By introducing symmetric functions, vertex operators for coupled Hall-Littlewood polynomials and Universal Characters are presented. By analyzing the commutation relations between these operators, explicit expressions and iterative formulas for the coupled Kostka-Foulkes polynomials are obtained. Furthermore, the stability of the polynomials is discussed, and simplified calculation formulas are provided for several special partition cases.

Key words: coupled Kostka-Foulkes polynomials; coupled Hall-Littlewood polynomials; vertex operators; Universal Characters; Kostka-Foulkes polynomials