doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2025.03.001

Nijenhuis 余代数及 Nijenhuis 配对 C-余模

方云霏[1],王　勇[2],张良云[1]

(1.南京农业大学理学院,江苏 南京 210095)
(2.南京晓庄学院信息工程学院,江苏 南京 211171)

[摘要]　本文给出了 Nijenhuis 余代数的一些性质及其刻画. 引入了 Nijenhuis 配对余模概念,并由双代数中的余积分,Hopf 代数中的对极映射,以及由 Hopf 模与重模构造了众多 Nijenhuis 配对余模.

[关键词]　Nijenhuis 余代数,Nijenhuis 配对余模,Hopf 代数,Hopf 模
[中图分类号]O152.5　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2025)03-0001-09

Nijenhuis Coalgebras and Nijenhuis Paired Comodules

Fang Yunfei[1],Wang Yong[2],Zhang Liangyun[1]

(1.College of Science,Nanjing Agricultural University,Nanjing 210095,China)
(2.School of Information Engineering,Nanjing Xiaozhuang University,Nanjing 211171,China)

Abstract:Firstly,we give some properties and their characterization of Nijenhuis coalgebras. Secondly,we introduce the notion of Nijenhuis paired comodules on coalgebra,and construct many more Nijenhuis paired comodules via cointegral in bialgebra and antipode of Hopf algebras,Hopf modules and dimodules.

Key words:Nijenhuis coalgebras,Nijenhuis paired comodules,Hopf algebras,Hopf modules

2000 年,Carinena 等人在研究双哈密顿系统时首次提出了结合代数上 Nijenhuis 算子的概念[1]. 近年来,Nijenhuis 代数的发展也受到了极大的关注,众多专家和学者,如,郭锂,白承铭等人开始研究 Nijenhuis 代数([2],[3],[4]). 而且有文献表明 Nijenhuis 代数在偏微分方程[5]、统计学和理论力学等领域的研究中发挥了重要作用.

研究表明,Nijenhuis 算子与 Rota-Baxter 算子、微分算子以及 O-算子之间有着密切的联系. 在文献[3]中,作者研究了预 Lie 代数上的 Nijenhuis 算子以及 Nijenhuis 算子与 Rota-Baxter 算子和 O-算子之间的关系,在文献[4]中,Bibhash 等人研究了 Leibniz 代数上 Nijenhuis 算子、Rota-Baxter 算子和修改的 Rota-Baxter 算子之间的联系,在文献[6]中,袁腊梅研究了结合共形代数上的 Nijenhuis 算子与 O-算子的关系,在文献[7]中,郭锂等人建立了微分算子,Rota-Baxter 算子与 Nijenhuis 算子之间的联系等.

值得注意的是,2006 年,Ebrahimi-Fard 在他的博士论文[8]中,为了研究 Rota-Baxter 代数与 Hopf 代数的重整化时首次提出了 Nijenhuis 余代数的概念,但截止到目前为止有关 Nijenhuis 余代数的研究成果并不多见,仍处于发展阶段.

本文正是基于以上研究背景,给出了 Nijenhuis 余代数的一些性质及其刻画,然后在余代数上引入了 Nijenhuis 配对余模概念,并由双代数中的余积分与 Hopf 代数中的对极映射以及由 Hopf 模与重模等构造了众多 Nijenhuis 配对模.

本文所讨论的对象均在域 K 上考虑,id 表示恒等映射,余代数均指余结合的余代数,并采用 Sweedler 记法[9].

1　基本定义

定义 1.1　设 C 是一个 K-线性空间,如果存在两个 K-线性映射 $\Delta:C\to C\otimes C,\varepsilon:C\to K$ 满足下面条件:

收稿日期:2023-12-04.
基金项目:中华农业科教基金会资助项目(NKJ202402009)、国家大学生创新训练计划资助项目(NKJ202402009).
通讯作者:张良云,教授,博士生导师,研究方向:Hopf 代数. E-mail:zlyun@ njau.edu.cn

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta=(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta,(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta=\mathrm{id}=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta, \tag{1}$$

则称(C,Δ,ε)是一个余代数[9],并分别称映射Δ,ε为这个余代数的余乘法和余单位. 以后,简记这个余代数为C.

用 Sweedler 记号,如果记

$$\Delta c=c_{(1)}\otimes c_{(2)}\in C\otimes C,c\in C,$$

则上面(1)式可以表示为

$$c_{(1)}\otimes c_{(2)(1)}\otimes c_{(2)(2)}=c_{(1)(1)}\otimes c_{(1)(2)}\otimes c_{(2)},\varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}=c=\varepsilon(c_{(2)})c_{(1)}.$$

定义 1.2 设C是一个余代数,如果存在一个K-线性映射$P:C\to C$,满足下面条件:

$$(P\otimes P)\Delta=(\mathrm{id}\otimes P)\Delta P+(P\otimes\mathrm{id})\Delta P+\lambda\Delta P, \tag{2}$$

则称(C,P)是一个权重为λ的 Rota-Baxter 余代数[10].

例 1.3 (1)设(C,P)是一个权重为$\lambda(\neq 0)$的 Rota-Baxter 余代数,则由文[10]知:$(C,\mu\lambda^{-1}P)$是一个权重为μ的 Rota-Baxter 余代数.

(2)设H是一个以$\{x,y,z\}$为基底的三维向量空间,定义H上的余乘法及余单位为:

$$\Delta(x)=x\otimes x,\Delta(y)=y\otimes y,\Delta(z)=z\otimes z,$$
$$\varepsilon(x)=\varepsilon(y)=\varepsilon(z)=1,$$

则(H,Δ,ε)是一个余代数. 如果存在一个线性映射$P:H\to H$以及$\lambda\in K$,使得

$$P(x)=\lambda z,P(y)=\lambda z,P(z)=0,$$

则(H,P)是一个权重为λ的 Rota-Baxter 余代数[11].

定义 1.4 设C是一个余代数,M是一个K-线性空间,如果存在一个K-线性映射$\rho:M\to C\otimes M$,满足下面条件:

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})\rho=(\mathrm{id}\otimes\rho)\rho,(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\rho=\mathrm{id}, \tag{3}$$

则称M是一个左C-余模[9],并称ρ为余模M的余模结构映射. 如果记$\rho(m)=m_{(-1)}\otimes m_{(0)}\in C\otimes M$,则上面(3)式可以表示为:对任意$m\in M$,

$$m_{(-1)(1)}\otimes m_{(-1)(2)}\otimes m_{(0)}=m_{(-1)}\otimes m_{(0)(-1)}\otimes m_{(0)(0)},$$
$$\varepsilon(m_{(-1)})\ m_{(0)}=m.$$

定义 1.5 设M是一个左C-余模,$\lambda\in K$,如果存在两个线性映射$P:C\to C$和$T:M\to M$,满足下面条件:

$$(P\otimes T)\rho=(P\otimes\mathrm{id})\rho T+(\mathrm{id}\otimes T)\rho T+\lambda\rho T, \tag{4}$$

则称(M,P,T)是一个权重为λ的 Rota-Baxter 配对(左)C-余模[12].

类似地,可以定义 Rota-Baxter 配对右C-余模.

例 1.6 (1)设(C,P)是一个权重为λ的 Rota-Baxter 余代数,则由上述定义知:(C,P,P)是一个权重为λ的 Rota-Baxter 配对C-余模,它的余模结构映射通过余代数C的余乘法给出.

(2)设(M,P,T)是一个权重为λ的 Rota-Baxter 配对C-余模,则由上述定义知:$(M,\mu P,\mu T)$也是一个权重为λ的 Rota-Baxter 配对C-余模,$\lambda,\mu\in K$.

2 Nijenhuis 余代数

本节主要给出 Nijenhuis 余代数的一些性质,并构造一些 Nijenhuis 余代数.

定义 2.1 设C是一个余代数,如果存在一个线性映射$N:C\to C$以及$\lambda\in K$,满足下面条件:

$$(N\otimes N)\Delta+\Delta N^2=(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N+(N\otimes\mathrm{id})\Delta N, \tag{5}$$

则称(C,N)是一个 Nijenhuis 余代数[8],并称N是余代数C上的一个 Nijenhuis 算子.

用 Sweedler 记号,对任意$c\in C$,(5)式可以表示为:

$$N(c_{(1)})\ \otimes N(c_{(2)})+N^2(c)_{(1)}\otimes N^2(c)_{(2)}=N(c)_{(1)}\otimes N(N(c)_{(2)})+N(N(c)_{(1)})\otimes N(c)_{(2)}.$$

设(C,N)是一个 Nijenhuis 余代数,若V是C的一个子余代数,并满足$N(V)\subseteq V$,则不难知道(V,N)为一个 Nijenhuis 余代数,以后称它为 Nijenhuis 余代数(C,N)的 Nijenhuis 子余代数.

例 2.2 (1)设(C,N)是一个 Nijenhuis 余代数,$\mu\in K$,则$(C,\mu\Delta,\mu N)$与$(C,\Delta,\mu N)$是一个 Nijenhuis 余

代数.

(2)设(C,P)是一个权重为-1 的 Rota-Baxter 余代数,如果 Rota-Baxter 算子 P 是幂等的,则由定义 2.1 知:(C,P)是一个 Nijenhuis 余代数.

命题 2.3 设(C,N)是一个 Nijenhuis 余代数,则(C^*,Δ^*,N^*)是一个 Nijenhuis 余代数.

证明 事实上,对任意$f,g\in C^*,c\in C$有

$$\langle\Delta^*(N^*(f)\otimes N^*(g)),c\rangle=\langle N^*(f)\otimes N^*(g),\Delta(c)\rangle=\langle f\otimes g,(N\otimes N)\Delta(c)\rangle,$$

$$\langle N^*(\Delta^*(N^*(f)\otimes g)+\Delta^*(f\otimes N^*(g))),c\rangle-\langle N^{*2}\Delta^*(f\otimes g),c\rangle=\langle\Delta^*(N^*(f)\otimes g)+\Delta^*(f\otimes N^*(g))-N^*\Delta^*(f\otimes g),N(c)\rangle=\langle f\otimes g,(N\otimes\mathrm{id})\Delta N(c)+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N(c)-\Delta N^2(c)\rangle.$$

因为(C,N)是一个 Nijenhuis 余代数,所以由(5)式可以证明:

$$\Delta^*(N^*(f)\otimes N^*(g))=N^*(\Delta^*(N^*(f)\otimes g)+\Delta^*(f\otimes N^*(g))-N^{*2}\Delta^*(f\otimes g).$$

显然,C^*是一个代数,故(C^*,Δ^*,N^*)是一个 Nijenhuis 代数.

命题 2.4 设(C,N)是一个 Nijenhuis 余代数,定义

$$\widetilde{N}=-k\mathrm{id}-N,\tag{6}$$

则$(C,\widetilde{N})$也是一个 Nijenhuis 余代数.

证明 由于(C,N)是一个 Nijenhuis 余代数,所以

$$(\mathrm{id}\otimes\widetilde{N})\Delta\widetilde{N}+(\widetilde{N}\otimes\mathrm{id})\Delta\widetilde{N}-\Delta\widetilde{N}^2=(\mathrm{id}\otimes(-k\mathrm{id}-N))\Delta(-k\mathrm{id}-N)+((-k\mathrm{id}-N)\otimes\mathrm{id})\Delta(-k\mathrm{id}-N)-\Delta(-k\mathrm{id}-N)^2=$$

$$\underbrace{k^2\Delta+k\Delta N+k(\mathrm{id}\otimes N)\Delta+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N}+\underbrace{k^2\Delta+k\Delta N+k(N\otimes\mathrm{id})\Delta+(N\otimes\mathrm{id})\Delta N}-\underbrace{k^2\Delta-2k\Delta N-\Delta N^2}=$$

$$k^2\Delta+k(\mathrm{id}\otimes N)\Delta+k(N\otimes\mathrm{id})\Delta+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N+(N\otimes\mathrm{id})\Delta N-\Delta N^2=k^2\Delta+k(\mathrm{id}\otimes N)\Delta+k(N\otimes\mathrm{id})\Delta+(N\otimes N)\Delta=((-k\mathrm{id}-N)\otimes(-k\mathrm{id}-N))\Delta=(\widetilde{N}\otimes\widetilde{N})\Delta.$$

即,

$$(\widetilde{N}\otimes\widetilde{N})\Delta+\Delta\widetilde{N}^2=(\mathrm{id}\otimes\widetilde{N})\Delta\widetilde{N}+(\widetilde{N}\otimes\mathrm{id})\Delta\widetilde{N},$$

故$(C,\widetilde{N})$是一个 Nijenhuis 余代数.

下面由余代数映射与余代数中的群像元分别构造 Nijenhuis 余代数.

命题 2.5 设 C 是一个余代数,若存在一个余代数映射 $N:C\to C$,使得 $N^2=N$,则(C,N)是一个 Nijenhuis 余代数.

证明 事实上,对任意$c\in C$,有

$$(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N(c)+(N\otimes\mathrm{id})\Delta N(c)-\Delta N^2(c)=(\mathrm{id}\otimes N)(N\otimes N)\Delta(c)+(N\otimes\mathrm{id})(N\otimes N)\Delta(c)-(N\otimes N)\Delta(c)=N(c_{(1)})\otimes N^2(c_{(2)})+N^2(c_{(1)})\otimes N(c_{(2)})-N(c_{(1)})\otimes N(c_{(2)})=(N\otimes N)\Delta(c),$$

即,

$$(N\otimes N)\Delta(c)=(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N(c)+(N\otimes\mathrm{id})\Delta N(c)-\Delta N^2(c),$$

故(C,N)是一个 Nijenhuis 余代数.

命题 2.6 设 C 是一个余代数,g 是 C 中的一个群像元(即,$\Delta(g)=g\otimes g,\varepsilon(g)=1$),定义

$$N_g:C\to C,N_g(c)=\varepsilon(c)g,$$

则(C,N_g)是一个 Nijenhuis 余代数.

反过来,如果 CharK=0 并且存在一个元素 $0\neq g\in C$,及一个线性映射 $N_g:C\to C,N_g(c)=\varepsilon(c)g$,使得$(C,N_g)$是一个 Nijenhuis 余代数,则元素 g 是余代数 C 中一个弱化形式的群像元,即,$\varepsilon(g)\Delta(g)=g\otimes g$.

证明 首先,N_g 是幂等的,这是由于对任意 $c\in C$,

$$N_g^2(c)=N_g(\varepsilon(c)g)=\varepsilon(c)\varepsilon(g)g=\varepsilon(c)g=N_g(c).$$

其次,N_g 是一个余代数映射,这是由于对任意 $c\in C$,

$$\Delta N_g(c)=\varepsilon(c)g\otimes g=N_g(c_{(1)})\otimes N_g(c_{(2)}),$$

故由命题 2.4 知:(C,N_g)是一个 Nijenhuis 余代数.

反之,在上述假设条件下,如果(C,N_g)是一个 Nijenhuis 余代数,则对任意 $c\in C$,

$$(N_g\otimes N_g)\Delta(c)+\Delta N_g^2(c)=\varepsilon(c_{(1)})g\otimes\varepsilon(c_2)g+\varepsilon(c)\varepsilon(g)\Delta(g)=\varepsilon(c)g\otimes g+\varepsilon(c)\varepsilon(g)\Delta(g),(N_g\otimes\mathrm{id})\Delta N_g(c)+(\mathrm{id}\otimes N_g)\Delta N_g(c)=\varepsilon(c)N_g(g_{(1)})\otimes g_{(2)}+\varepsilon(c)g_{(1)}\otimes N_g(g_{(2)})=$$

$$\varepsilon(c)\varepsilon(g_{(1)})g\otimes g_{(2)}+\varepsilon(c)g_{(1)}\otimes\varepsilon(g_{(2)})g=\varepsilon(c)g\otimes g+\varepsilon(c)g\otimes g,$$

因此,有

$$\varepsilon(c)g\otimes g+\varepsilon(c)\varepsilon(g)\Delta(g)=\varepsilon(c)g\otimes g+\varepsilon(c)g\otimes g,$$

故 $\varepsilon(g)\Delta(g)=g\otimes g$.

下面由双代数或者 Hopf 代数构造 Nijenhuis 余代数.

命题 2.7　设 C 是一个双代数,H 是一个 Hopf 代数(s 是它的对极映射),如果存在两个双代数映射 $i:H\to C,\pi:C\to H$ 使得 $\pi\circ i=\mathrm{id}$,则 (C,Π) 是一个 Nijenhuis 余代数.

这里 $\Pi=\mathrm{id}*(i\circ s\circ\pi)$,其中"$*$"是 $\mathrm{End}(C)$ 中的卷积乘.

证明　由文[8,例 3.3]知:Π 是幂等的,并且 (C,Π) 是一个权重为 -1 的 Rota-Baxter 余代数,故由例 2.2 知:(C,Π) 是一个 Nijenhuis 余代数.

命题 2.8　设 H 是一个 Hopf 代数(s 是它的对极映射),如果 C 是一个右 H-Hopf 模余代数(即,它既是一个右 H-模余代数,又是一个右 H-Hopf 模),则 $P\equiv c_{(0)}\cdot s(c_{(1)})$ 是 C 上的一个 Nijenhuis 算子.

因此,每个 Hopf 代数都可以构成一个 Nijenhuis 余代数.

证明　由于 C 是一个右 H-Hopf 模,所以不难证明 $P^2=P$. 再由文[11]中的定理 3.2 知:(C,P) 是一个权重为 -1 的 Rota-Baxter 余代数. 故由例 2.2 知:(C,P) 是一个 Nijenhuis 余代数.

由于 Hopf 代数 H 可以构成自身上的一个右 H-Hopf 模余代数(它的右 H-模恰好是由它的乘法给出),所以每个 Hopf 代数 H 都可以构成一个 Nijenhuis 余代数.

下面给出 Nijenhuis 余代数的刻画.

命题 2.9　设 C 是一个余代数,$N:C\to C$ 是一个线性映射,则有下面结论.

(1)若 $N^2=0$,则 (C,N) 是一个 Nijenhuis 余代数当且仅当 (C,N) 是一个权重为 0 的 Rota-Baxter 余代数;

(2)若 $N^2=N$,则 (C,N) 是一个 Nijenhuis 余代数当且仅当 (C,N) 是一个权重为 -1 的 Rota-Baxter 余代数;

(3)若 $N^2=\mathrm{id}$,则 (C,N) 是一个 Nijenhuis 余代数当且仅当 $(C,N+\mathrm{id})$ 是一个权重为 -2 的 Rota-Baxter 余代数.

证明　(1)当 $N^2=0$ 时,如果 (C,N) 是一个 Nijenhuis 余代数,则

$$(N\otimes N)\Delta=(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N+(N\otimes\mathrm{id})\Delta N,$$

即 (C,N) 是一个权重为 0 的 Rota-Baxter 余代数.

反之,同理证明.

(2)当 $N^2=N$ 时,如果 (C,N) 是一个 Nijenhuis 余代数,则

$$(N\otimes N)\Delta+\Delta N=(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N+(N\otimes\mathrm{id})\Delta N,$$

即 (C,N) 是一个权重为 -1 的 Rota-Baxter 余代数.

反之,同理证明.

(3)由于

$$((N+\mathrm{id})\otimes\Delta(N+\mathrm{id}))\Delta=(N\otimes N)\Delta+(N\otimes\mathrm{id})\Delta+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\Delta=(N\otimes N)\Delta+(N\otimes\mathrm{id})\Delta+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta+\Delta,$$

$$((N+\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})\Delta(N+\mathrm{id})+(\mathrm{id}\otimes(N+\mathrm{id}))\Delta(N+\mathrm{id})=((N+\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})\Delta N+((N+\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})\Delta+(\mathrm{id}\otimes(N+\mathrm{id}))\Delta N+$$

$$(\mathrm{id}\otimes(N+\mathrm{id}))\Delta=(N\otimes\mathrm{id})\Delta N+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\Delta N+(N\otimes\mathrm{id})\Delta+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\Delta+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\Delta N+$$

$$(\mathrm{id}\otimes N)\Delta+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\Delta=(N\otimes\mathrm{id})\Delta N+2\Delta N+(N\otimes\mathrm{id})\Delta+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta+2\Delta,$$

$$2\Delta(N+\mathrm{id})=2\Delta N+2\Delta,$$

所以当 $N^2=\mathrm{id}$ 时,如果 $(C,N+\mathrm{id})$ 是一个权重为 -2 的 Rota-Baxter 余代数,则通过上面的证明,有

$$(N\otimes N)\Delta+\Delta=(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N+(N\otimes\mathrm{id})\Delta N,$$

即,(C,N) 是一个 Nijenhuis 余代数.

反之,易证.

下面,将在以 $\{g,x\}$ 为基的如下二维余代数 C 上构造 Nijenhuis 算子,即,构造余代数 C 上的 Nijenhuis 映射.

设域 K 的特征为 0,余代数 C 的余乘法和余单位定义为

$$\Delta(g)=g\otimes g,\Delta(x)=g\otimes x+x\otimes g,\varepsilon(g)=1,\varepsilon(x)=0,$$

并令

$$\begin{cases}N(g)=I_1g+I_2x\\N(x)=I_3g+I_4x\end{cases},$$

是 C 上的 Nijenhuis 算子,其中 $I_j\in K,j=1,2,3,4$. 取 $c=g$,须有

$$(N\otimes N)\Delta(g)=(N\otimes N)(g\otimes g)=(I_1g+I_2x)\otimes(I_1g+I_2x)=I_1^2g\otimes g+I_1I_2g\otimes x+I_1I_2x\otimes g+I_2^2x\otimes x,$$

$$\Delta N^2(g)=I_1\Delta N(g)+I_2\Delta N(x)=I_1\Delta(I_1g+I_2x)+I_2\Delta(I_3g+I_4x)=(I_1^2+I_2I_3)g\otimes g+(I_1I_2+I_2I_4)g\otimes x+(I_1I_2+I_2I_4)x\otimes g,$$

$$(N\otimes\mathrm{id})\Delta N(g)+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N(g)=(N\otimes\mathrm{id})(I_1g\otimes g+I_2g\otimes x+I_2x\otimes g)+(\mathrm{id}\otimes N)(I_1g\otimes g+I_2g\otimes x+I_2x\otimes g)=$$

$$(2I_1^2+2I_2I_3)g\otimes g+(2I_1I_2+I_2I_4)x\otimes g+(2I_1I_2+I_2I_4)g\otimes x+2I_2^2x\otimes x,$$

则由(5)式,整理得到如下方程:

$$I_2I_3=0,I_2^2=0,$$

故 $I_2=0$. 再取 $c=x$,须有

$$(N\otimes N)\Delta(x)=(N\otimes N)(g\otimes x+x\otimes g)=(I_1g+I_2x)\otimes(I_3g+I_4x)+(I_3g+I_4x)\otimes(I_1g+I_2x)=2I_1I_3g\otimes g+$$

$$(I_1I_4+I_2I_3)g\otimes x+(I_1I_4+I_2I_3)x\otimes g+2I_2I_4x\otimes x,\Delta N^2(x)=I_3\Delta N(g)+I_4\Delta N(x)=$$

$$I_3\Delta(I_1g+I_2x)+I_4\Delta(I_3g+I_4x),(I_1I_3+I_3I_4)g\otimes g+(I_2I_3+I_4^2)g\otimes x+(I_2I_3+I_4^2)x\otimes g,$$

$$(N\otimes\mathrm{id})\Delta N(x)+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N(x)=\underbrace{(N\otimes\mathrm{id})(I_3g\otimes g+I_4g\otimes x+I_4x\otimes g)}+(\mathrm{id}\otimes N)(I_3g\otimes g+I_4g\otimes x+I_4x\otimes g)=$$

$$\underbrace{I_1I_3+I_3I_4)g\otimes g+I_1I_4g\otimes gx+(I_2I_3+I_4^2)x\otimes g+I_2I_4x\otimes x}+(I_2I_3+I_3I_4)g\otimes g+$$

$$(I_2I_3+I_4^2)g\otimes x+I_1I_4x\otimes g+I_2I_4x\otimes x=(2I_1I_3+2I_3I_4)g\otimes g+(I_1I_4+I_2I_3+I_4^2)g\otimes x+$$

$$(I_1I_4+I_2I_3+I_4^2)x\otimes g+2I_2I_4x\otimes x,$$

则由(5)式,整理得到如下方程:

$$I_1I_3=I_3I_4,I_2I_3=0,$$

如果 $I_3=0$,则上面方程成立,故 $I_2=I_3=0$,即,$N(g)=I_1g,N(x)=I_4x$.

如果 $I_3\neq0$,则由 $I_1I_3=I_3I_4$ 知:$I_1=I_4$,即,$N(g)=I_1g,N(x)=I_3g+I_1x$. 故有

命题 2.10 由上述余代数 C 构造的 Nijenhuis 算子,有如下两种情况:

$$N(g)=mg,N(x)=nx,$$

或者

$$N(g)=mg,N(x)=ng+mx,$$

式中,$m,n\in K$.

下面,将在以 $\{u,v\}$ 为基的三角余代数 C 上构造 Nijenhuis 算子,即,构造三角余代数 C 上的 Nijenhuis 映射.

设 C 是一个三角余代数,它的余乘法映射和余单位映射分别为

$$\Delta(u)=u\otimes v+v\otimes u,\Delta(v)=v\otimes v-u\otimes u,$$

$$\varepsilon(u)=0,\varepsilon(v)=1,$$

并设

$$\begin{cases}N(u)=I_1u+I_2v\\N(v)=I_3u+I_4v\end{cases},$$

是 C 上的 Nijenhuis 算子,其中 $I_j\in K,j=1,2,3,4$. 取 $c=u$,须有

$$(N\otimes N)\Delta(u)=(N\otimes N)(u\otimes v+v\otimes u)=N(u)\otimes N(v)=2I_1I_3u\otimes u+(I_1I_4+I_2I_3)u\otimes v+(I_1I_4+I_2I_3)v\otimes u+2I_2I_4v\otimes v,$$

$$\Delta N^2(u)=I_1\Delta N(u)+I_2\Delta N(v)=I_1\Delta(I_1u+I_2v)+I_2\Delta(I_3u+I_4v)=(I_1^2+I_2I_3)\Delta(u)+(I_1I_2+I_2I_4)\Delta(v)=$$

$$-(I_1I_2+I_2I_4)u\otimes u+(I_1^2+I_2I_3)u\otimes v+(I_1^2+I_2I_3)v\otimes u+(I_1I_2+I_2I_4)v\otimes v,$$

$$(N\otimes\mathrm{id})\Delta N(u)+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N(u)=(N\otimes\mathrm{id})(I_1u\otimes v+I_1v\otimes u+I_2v\otimes v-I_2u\otimes u)+(\mathrm{id}\otimes N)(I_1u\otimes v+$$

$$I_1v\otimes u+I_2v\otimes v-I_2u\otimes u)+(\mathrm{id}\otimes N)(I_1u\otimes v+I_1v\otimes u+I_2v\otimes v-I_2u\otimes u)=(I_1I_3-I_1I_2)u\otimes u+$$

$$(I_1^2+I_2I_3)v\otimes u+(I_1I_2+I_2I_4)v\otimes v=(2I_1I_2-2I_1I_2)u\otimes u+(I_1^2+I_2I_3+$$
$$I_1I_4-I_2^2)u\otimes v+(I_1^2+I_2I_3+I_1I_4-I_2^2)v\otimes u+(2I_1I_2+2I_2I_4)v\otimes v,$$

则由(5)式,整理得到如下方程:

$$I_2I_4=I_1I_2,I_2I_3=-I_2^2,$$

再取 $c=v$,须有

$$(N\otimes N)\Delta(v)=(N\otimes N)(v\otimes v-u\otimes u)=N(v)\otimes N(v)-N(u)\otimes N(u)=(I_3^2-I_1^2)u\otimes v+$$
$$(I_3I_4-I_1I_2)v\otimes u+(I_4^2-I_2^2)v\otimes v,$$
$$\Delta N^2(v)=I_3\Delta N(u)+I_4\Delta N(v)=I_3\Delta(I_1u+I_2v)+I_4\Delta(I_3u+I_4v)=(-I_2I_3-I_4^2)u\otimes u+$$
$$(I_1I_3+I_3I_4)u\otimes v+(I_1I_3+I_3I_4)v\otimes u+(I_2I_3+I_4^2)u\otimes v,$$
$$(N\otimes\mathrm{id})\Delta N(v)+(\mathrm{id}\otimes N)\Delta N(v)=(N\otimes\mathrm{id})(I_3u\otimes v+I_3v\otimes u+I_4v\otimes v-I_4u\otimes u)+(\mathrm{id}\otimes N)(I_3u\otimes v+I_3v\otimes u+$$
$$I_4v\otimes v-I_4u\otimes u)=(I_3^2-I_1I_4)u\otimes u+(I_1I_3+I_3I_4)u\otimes v+(I_3I_4-I_2I_4)v\otimes u+(I_2I_3+I_4^2)v\otimes v=$$
$$(2I_3^2-2I_1I_4)u\otimes u+(I_1I_3+2I_3I_4-I_2I_4)u\otimes u+(I_1I_3+2I_3I_4-I_2I_4)v\otimes u+(2I_2I_3+2I_4^2)v\otimes v,$$

则由(5)式,整理得到如下方程:

$$I_1I_2=I_2I_4,I_2I_3=-I_2^2,I_1^2+I_3^2+I_4^2=2I_1I_4-I_2I_3,$$

如果 $I_2=0$,则由 $I_1^2+I_3^2+I_4^2=2I_1I_4-I_2I_3$ 知:$(I_1-I_4)^2+I_3^2=0$,故 $I_1=I_4,I_3=0$,即,$N(u)=I_1u,N(v)=I_1v$.

如果 $I_2\neq0$,则由 $I_1I_2=I_2I_4$ 知:$I_1=I_4$. 再由 $I_2I_3=-I_2^2$ 知:$I_2=-I_3$,即,$N(u)=I_1u+I_2v,N(v)=I_1v-I_2u$. 在这种情况下,显然,$I_1^2+I_3^2+I_4^2=2I_1I_4-I_2I_3$ 也是成立的. 故有

命题 2.11　上述三角余代数 C 上所构造的 Nijenhuis 算子如下:

$$N(u)=pu+qv,N(v)=pv-qu,$$

式中,$p,q\in K$.

3　Nijenhuis 配对 C-余模及其构造

本节,我们将引入 Nijenhuis 配对 C-余模的概念,然后给出 Nijenhuis 配对 C-余模的一些性质及其构造.

定义 3.1　设 M 是一个左 C-余模,如果存在两个线性映射 $N:C\to C,T:M\to M$ 满足下面条件:

$$(N\otimes T)\rho=(\mathrm{id}\otimes T)\rho T+(N\otimes\mathrm{id})\rho T-\rho T^2,\tag{7}$$

则称(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对(左)C-余模,如果对任意映射 $N:C\to C$,(M,N,T) 都是一个 Nijenhuis 配对 C-余模,则称(M,T)是一个泛性 Nijenhuis 配对 C-余模..

用 Sweedler 记号,(7)式可以表示为:

$N(m_{(-1)})\otimes T(m_{(0)})=T(m)_{(-1)}\otimes T(T(m)_{(0)})+N(T(m)_{(-1)})\otimes T(m)_{(0)}-T^2(m)_{(-1)}\otimes T^2(m)_{(0)}$.

这里$\rho(m)=m_{(-1)}\otimes m_{(0)}\in C\otimes M,m\in M$,其中 ρ 为左 C-余模 M 的结构映射.

设(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 C-余模,若 V 是 M 的一个 C-子余模,并满足 $T(V)\subseteq V$,则(V,N,T)为一个 Nijenhuis 配对 C-余模(以后,称它为 M 的一个 Nijenhuis 配对 C-子余模).

设(M,N,T),(M',N',T')均是 Nijenhuis 配对 C-余模,若存在一个 C-余模映射 $\varphi:(M,N,T)\to(M',N',T')$,满足 $\varphi\circ T=T'\circ\varphi$,则称 φ 是一个 Nijenhuis 配对 C-余模映射. 此时,易证 $Ker\varphi$ 和 $Im\varphi$ 分别为 M 与 M'的 Nijenhuis 配对 C-子余模.

例 3.2　(1)设(C,Δ,N)是一个 Nijenhuis 余代数,则易证(C,N,N)是一个 Nijenhuis 配对 C-余模.

这里余代数 C 通过自身的余乘法映射构成一个左 C-余模.

(2)设(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 C-余模,则可以直接验证$(M,\mu N,\mu T)$也是一个 Nijenhuis 配对 C-余模,$\mu\in K$.

引理 3.3　设 M 是一个左 C-余模,若存在一个 C-余模映射 $T:M\to M$,则(M,T)是一个泛性 Nijenhuis 配对 C-余模.

证明　由于 T 是一个左 C-余模映射,所以对任意一个 K-线性映射 $N:C\to C$,以及对任意 $m\in M$,有

$$T(m)_{(-1)}\otimes T(T(m)_{(0)})+N(T(m)_{(-1)})\otimes T(m)_{(0)}-T^2(m)_{(-1)}\otimes T^2(m)_{(0)}=m_{(-1)}\otimes T^2(m_{(0)})+$$

$$N(m_{(-1)})\otimes T(m_{(0)})-m_{(-1)}\otimes T^2(m_{(0)})=N(m_{(-1)})\otimes T(m_{(0)}).$$

即,

$$N(m_{(-1)})\otimes T(m_{(0)})=T(m)_{(-1)}\otimes T(T(m)_{(0)})+N(T(m)_{(-1)})\otimes T(m)_{(0)}-T^2(m)_{(-1)}\otimes T^2(m)_{(0)},$$

故(M,T)是一个泛性 Nijenhuis 配对 C-余模.

命题 3.4 设(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 C-余模,若存在一个 C-余模同构映射 $\varphi:M\to M$,则$(M,N,\varphi^{-1}T\varphi)$是一个 Nijenhuis 配对 C-余模. 这里 φ^{-1}为余模同构映射 φ 的逆映射.

证明 由 φ 是 C-余模同构映射知:φ^{-1}也是 C-余模映射,即,$\rho\varphi^{-1}=(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1})\rho$,因此

$$(N\otimes\varphi^{-1}T\varphi)\rho=(N\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1}T)(\mathrm{id}\otimes\varphi)\rho=(N\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1}T)\rho\varphi=$$

$$(N\otimes\varphi^{-1}T)\rho\varphi(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1}T\varphi)\rho\varphi^{-1}T\varphi-\rho(\varphi^{-1}T\varphi)^2=$$

$$(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1}T\varphi)(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1})\rho T\varphi-(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1})\rho T^2\varphi=(N\otimes\varphi^{-1}+\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1}T)\rho T\varphi-(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1})\rho T^2\varphi=$$

$$(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1})(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes T)\rho T\varphi-(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1})\rho T^2\varphi=(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1})\underbrace{((N\otimes\mathrm{id})\rho T+(\mathrm{id}\otimes T)\rho T-\rho T^2)}\varphi=$$

$$(\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1})(N\otimes T)\rho\varphi=(N\otimes\varphi^{-1}T)\rho\varphi.$$

故

$$(N\otimes\varphi^{-1}T\varphi)\rho+\rho(\varphi^{-1}T\varphi)^2=(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1}T\varphi)\rho\varphi^{-1}T\varphi,$$

即,$(M,N,\varphi^{-1}T\varphi)$是一个 Nijenhuis 配对 C-余模.

命题 3.5 设 M 是一个 C-余模,$T:M\to M$ 是一个幂等的满射,则(M,id,T)是一个 Nijenhuis 配对 C-余模.

证明 因为 T 是一个满射,所以对任意 $m\in M$,存在一个元素 $n\in M$,使得 $m=T(n)$,故由 T 是幂等知:

$$(\mathrm{id}\otimes T)\rho(m)=(\mathrm{id}\otimes T)\rho(T(n))=(\mathrm{id}\otimes T)\rho(T^2(n))=(\mathrm{id}\otimes T)\rho(T(m)),$$

$$(\mathrm{id}\otimes T)\rho(m)=(\mathrm{id}\otimes T)\rho(T(m))=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\rho T(m)+(\mathrm{id}\otimes T)\rho T(m)-\rho T(m)=$$

$$(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\rho T(m)+(\mathrm{id}\otimes T)\rho T(m)-\rho T^2(m),$$

因此,(M,id,T)是一个 Nijenhuis 配对 C-余模.

命题 3.6 设 M 是一个 C-余模,如果存在两个线性算子 $N:C\to C$,$T:M\to M$,则下面结论成立.

(1)若 $T^2=0$,则(N,T)是 C-余模 M 上的一组 Nijenhuis 配对算子,当且仅当(N,T)是 C-余模 M 上的一组权重为 0 的 Rota-Baxter 配对算子;

(2)若 $T^2=T$,则(N,T)是 C-余模 M 上的一组 Nijenhuis 配对算子,当且仅当(N,T)是 C-余模 M 上的一组权重为-1 的 Rota-Baxter 配对算子.

证明 (1)如果 $T^2=0$ 时,则由 Nijenhuis 配对 C-余模定义知,结论是成立的.

(2)设 $T^2=T$,如果(N,T)是 C-余模 M 上的一组 Nijenhuis 配对算子,则

$$(N\otimes T)\rho=(\mathrm{id}\otimes T)\rho T+(N\otimes\mathrm{id})\rho T-\rho T,$$

即,(N,T)是 C-余模 M 上的一组权重为-1 的 Rota-Baxter 配对算子.

反之,同理证明.

命题 3.7 设 M 是一个 C-余模,如果 M 有一个 C-余模直和分解,则存在一个幂等的 C-余模映射 $T:M\to M$,使得(M,T)是一个泛性 Nijenhuis 配对 C-余模.

证明 假设存在 M 的一个 C-余模直和分解 $M=M_1\oplus M_2$,这里 M_1,M_2是 M 的子余模,令 $T(m)=(m_1+m_2)=m_1\in M_1$,其中 $m=m_1+m_2\in M$,故 T 是幂等的,并且对任意 $m\in M$,有

$$(\mathrm{id}\otimes T)\rho(m)=(\mathrm{id}\otimes T)\rho(m_1+m_2)=m_{1(-1)}\otimes T(m_{1(0)}+m_{2(-1)}\otimes T(m_{2(0)})=m_{1(-1)}\otimes m_{1(0)}=\rho(m_1)=\rho T(m),$$

即,T 是一个 C-余模映射,故由引理 3.3 知:(M,T)是一个泛性 Nijenhuis 配对 C-余模.

下面,由双代数及其余积分,Hopf 模和重模构造 Nijenhuis 配对 C-余模.

命题 3.8 设 H 是一个双代数,$(V,\rho v)$,$(W,\rho w)$是两个 H-余模,如果存在一个线性映射 $N:H\to H$ 以及存在两个幂等的 H-余模映射 $T_V:V\to V$,$T_W:W\to W$,使得(V,N,T_V),(W,N,T_W)是 Nijenhuis 配对 H-余模,则$(V\otimes W,N,T)$是一个 Nijenhuis 配对 H-余模.

这里 $V\otimes W$ 的 H-余模结构映射定义为

$$\rho'_{V\otimes W}:V\otimes W\to H\otimes V\otimes W,\rho'_{V\otimes W}(v\otimes w)=v_{(-1)}w_{(-1)}\otimes v_{(0)}\otimes w_{(0)}.$$

并且线性映射 $T:V\otimes W\to V\otimes W$ 定义为

$$T(v\otimes w)=T_V(v)\otimes T_W(w).$$

证明　首先,由文[13]知:$(V\otimes W,\rho'_{V\otimes W})$是一个左 H-余模,并对任意 $v\in V,w\in W$,有

$$(N\otimes T)\rho'_{V\otimes W}(v\otimes w)=(N\otimes T)(v_{(-1)}w_{(-1)}\otimes v_{(0)}\otimes w_{(0)})=(N(v_{(-1)}w_{(-1)})\otimes T_V(v_{(0)})\otimes T_W(w_{(0)}),$$

$$(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes T)\rho'_{V\otimes W}T(v\otimes w)=(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes T)\rho'_{V\otimes W}(T_V(v)\otimes T_W(w))=$$

$$(N\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes T)(v_{(-1)}w_{(-1)}\otimes T_V(v_{(0)})\otimes T_W(w_{(0)}))=$$

$$(N(v_{(-1)}w_{(-1)})\otimes T_V(v_{(0)})\otimes T_W(w_{(0)})+v_{(-1)}w_{(-1)}\otimes T_V(v_{(0)})\otimes T_W(w_{(0)}),$$

$$\rho T^2(V\otimes W)=\rho T(V\otimes W)=\rho(T_V(v)\otimes T_W(w))=T_V(v)_{(-1)}T_W(w)_{(-1)}\otimes T_V(v)_{(0)}\otimes T_W(w)_{(0)}=$$

$$v_{(-1)}w_{(-1)}\otimes T_V(v)_{(0)}\otimes T_W(w)_{(0)},$$

故,$(V\otimes W,N,T)$是一个 Nijenhuis 配对 H-余模.

命题 3.9　设 H 是一个双代数,M 是一个 H-余模,若存在一个左 H-余模映射 $T:M\to M$,则(M^{coH},T)是一个 Nijenhuis 配对 H-余模.

这里

$$M^{coH}=\{m\in M\mid\rho(m)=1_H\otimes m\},$$

证明　由 M^{coH}的定义,不难证明:M^{coH}是一个 H-余模. 由于 T 是一个 H-余模映射,所以对任意 $m\in M^{coH}$,有

$$\rho(T(m))=(\mathrm{id}\otimes T)\rho(m)=(\mathrm{id}\otimes T)(1_H\otimes m)=1_H\otimes T(m),$$

即,$T(m)\in M^{coH}$,故对任意线性映射 $N:H\to H$,

$$(N\otimes\mathrm{id})\rho(T(m))+(\mathrm{id}\otimes T)\rho(T(m))-\rho(T^2(m))=(N\otimes\mathrm{id})(1_H\otimes T(m))+$$

$$(\mathrm{id}\otimes T)(1_H\otimes T(m))-(1_H\otimes T^2(m))=(N\otimes T)\rho(m),$$

即,

$$(N\otimes T)\rho(m)+\rho(T^2(m))=(N\otimes\mathrm{id})\rho(T(m))+(\mathrm{id}\otimes T)\rho(T(m)),$$

因此,(M^{coH},T)是一个 Nijenhuis 配对 H-余模.

设 H 是一个双代数,如果存在一个元素 λ 使得对任意$f\in H^*$,满足:$f\lambda=\varepsilon_{H^*}(f)\lambda$,则称 λ 为 H^* 的一个左余积分.

进一步,如果左余积分 λ 满足 $\varepsilon_{H^*}(\lambda)=1$,则称 H 是一个余半单双代数. 在这种情况下,左余积分 λ 满足 $\lambda(1_H)=1$ 且 $\lambda^2=\lambda$.

命题 3.10　设 H 是一个具有非零左余积分 λ 的余半单双代数,M 是一个 H-余模,定义如下线性映射:

$$N:H\to H,N(h)=\lambda(h_{(1)})h_{(2)},T:M\to M,T(m)=\lambda(m_{(-1)})m_{(1)},$$

则(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 H-余模.

证明　由于 λ 为 H^* 中的一个左余积分,不难证明:$T^2(m)=T(m)$. 再由文[12,命题 4.1]知:(M,N,T)是一个权重为-1 的 Rota-Baxter 配对 H-余模,故由命题 3.6 知:(M,N,T)是一个 Nijenhuis 配对 H-余模.

命题 3.11　设 H 是一个 Hopf 代数,M 是一个 H-Hopf 模,定义一个线性映射 $T:M\to M,T(m)=S(m_{(-1)})\cdot m_{(0)}$,则$(T(M),T)$是一个泛性 Nijenhuis 配对 H-余模.

证明　由于 M 是一个 H-Hopf 模,所以不难证明:$T^2=T$. 另外,由于对任意 $T(m)\in T(M)$,

$$\rho(T(m))=1_H\otimes T(m),$$

所以 $T(M)$是一个 H-余模,故 T 是一个 H-余模映射. 因此,由引理 3.3 知:$(T(M),T)$是一个泛性 Nijenhuis 配对 H-余模.

命题 3.12　设 H 是一个双代数,$0\neq e\in H$,M 是一个左,右 H-重模,定义一个线性映射 $T:M\to M$,$T(m)=e\cdot m$,则(M,T)是一个泛性 Nijenhuis 配对右 H-余模.

证明　由于 M 是一个左,右 H-重模,所以对任意 $m\in M$,有

$$(T\otimes\mathrm{id})\rho(m)=T(m_{(0)})\otimes m_{(1)}=e\cdot m_{(0)}\otimes m_{(1)}=\rho(e\cdot m)=\rho T(m),$$

故 T 是一个右 H-余模映射,故由引理 3.3 知:(M,T)是一个泛性 Nijenhuis 配对右 H-余模.

[参考文献]

[1] CARINENA J,GRABOWSKI J,MARMO G. Quantum bi-Hamiltonian systems[J]. International journal of modern physics A,2000,15:4797-4810.

[2] LEI P,GUO L. Nijenhuis algebras,NS algebras,and N-dendriform algebras[J]. Frontiers of mathematics in China,2012,07:827-846.

[3] WANG Q, BAI C M, LIU J F, et al. Nijenhuis operators on pre-Lie algebras[J]. Communications in contemporary mathematics,2019,21(07):1850050.

[4] BIBHASH M,RIPAN S. Nijenhuis operators on Leibniz algebras[EB/OL]. arixv:2306.06428v1.

[5] MAGRI F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation[J]. Journal of mathematical physics,1978,19(5):1156-1162.

[6] YAUN L M. O-operators and Nijenhuis operators of associative conformal algebras[J]. Journal of algebra,2022,609:245-291.

[7] GUO L,WILLIAM Y S. ZHANG R H. On Rota's problem for linear operators in associative algebras[J]. International symposium on symbolic and algebraic computation,2011,8:47-154.

[8] EBRAHIMI-FARD K. Rota-Baxter algebras and the Hopf algebra of renormalization[D]. Germany:Universität Bonn,,2006.

[9] SWEEDLER M E. Hopf algebras[M]. New York:Benjamin,1969.

[10] JIAN R Q,ZHANG J. Rota-Baxter coalgebras[J]. 2014,arixv:1409.3052,10.48550/arXiv.1409.3052.

[11] MA T S,LIU L L. Rota-Baxter coalgebras and Rota-Baxter bialgebras[J]. Linear and multilinear algebra,2015,64(5):968-979.

[12] ZHENG H H,ZHANG Y X,ZHANG L Y. Rota-Baxter paired comodule and Rota-Baxter paired Hopf module[J]. Colloquium mathematicum,2021,168(1):59-83.

[13] MONTGOMERY S. Hopf algebras and their actions on rings[M]. Providence,RI,AMS:Conference Board of the Mathematical Science 82,1993.

[责任编辑:陆炳新]