引用格式：曹梦涵, 丁红林. 随机能量多覆盖问题 [J]. 电子科技大学学报, 2026, 55(2): 224-231.
CAO M H, DING H L. The stochastic power multi-coverage problem[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2026, 55(2): 224-231.

随机能量多覆盖问题

曹梦涵，丁红林*

（云南大学数学与统计学院，昆明 650504）

摘要：该文研究随机能量多覆盖问题：给定一些用户和基站，以及几种可能发生的场景和每种场景发生的概率，每种场景下需要被覆盖的用户以及覆盖次数需求已知，不同场景的用户集需要使用不同的信号覆盖，每个基站发射信号消耗的能量都满足一个能量方程。其目标是要为每一个基站确定发射信号的类型及其覆盖半径，满足所有场景中需要被覆盖用户的覆盖次数需求，并且期望消耗能量总和达到最小。该问题是最小能量覆盖问题的一种推广形式，具有两阶段随机优化问题中的有限场景特征，与点覆盖和集合覆盖等经典优化问题关系密切。利用点覆盖与集合覆盖问题中的“度权”函数与“分层”策略，把问题实例中每个圆盘的权重分解为一系列度权，分而治之地优先选择各场景中度权较小的圆盘，运用该策略设计出求解随机能量多覆盖问题的一个多项式时间近似算法。

关键词：多覆盖；随机优化；有限场景；度权函数；近似算法
中图分类号：TN915; O22 **文献标志码：**A DOI: 10.12178/1001-0548.2024220

The stochastic power multi-coverage problem

CAO Menghan and DING Honglin*

(School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650504, China)

Abstract: This paper studies the stochastic power multi-coverage problem: Given some users and base stations, as well as several possible scenarios and the probability of each scenario occurring, the users that need to be covered and the number of times of coverage for each user required in each scenario are known; different signal coverages are needed for the user sets in different scenarios; the power consumed by each base station in transmitting signal all satisfies the power equation, the objective of the stochastic power multi-coverage problem is to determine the type of transmitted signal and its coverage radius for each base station, to meet the coverage requirements for the users in all scenarios and minimize the total expected power consumption. This problem is a generalization of the minimum power coverage problem and has the characteristic of finite scenarios in two-stage stochastic optimization problems, closely related to classical optimization problems such as vertex cover and set cover. By using the "degree-weighted" function and the "layering" strategy from the vertex cover and the set cover problems, the weight of each disk in the problem instance are decomposed into a series of degree weights. The algorithm then proceeds by prioritizing the disks with smaller degree weights in each scenario, and this strategy is employed to design a polynomial-time approximation algorithm for solving the stochastic power multi-coverage problem.

Key words: multi-coverage; stochastic optimization; finite scenario; degree-weighted function; approximation algorithm

随着无线传感器网络的快速发展，能量覆盖相关问题已成为无线传感器网络设计和部署中的一类重要问题，可用于环境监测、智能农业、建筑监控等场景，通过在监测区域布置传感器，并把监测到的大气质量、土壤湿度、烟雾等关键数据传输至中心节点，以达到实时监测、科学管理的目的。深入研究并解决能量覆盖相关问题，对延长传感器节点的电池寿命、降低维护成本以及提高传感器网络的

收稿日期：2024−08−16
基金项目：国家自然科学基金（11801498）
作者简介：曹梦涵，主要从事组合优化方面的研究。
*通信作者 E-mail: Ding-HL@outlook.com

可靠性和稳定性起到重要作用。

除此之外，在基本的能量覆盖问题上增加约束可以得到很多变形情况，这些变形问题往往与生活中复杂多变的实际情况相对应。如在许多实际问题中，需要考虑多场景随机优化[1−2]的情景，相对于确定性优化问题来说，随机优化问题是特指带有某些随机因素的最优化问题，需要通过给定实例的概率分布来构建不确定模型。相比于确定性组合优化问题，对随机优化问题的研究更能贴近真实世界环境。如在应急设施布局优化领域中，需要根据随机离散场景来模拟不确定需求，通过优化多重覆盖下最小覆盖水平和期望总成本两个目标，构建应急储备库多级协同选址多目标模型[3]，对这些问题的深入研究可帮助人们在更短时间更合理地分配资源。

首先介绍经典的最小能量覆盖问题及其相关研究进展，具体定义如下：给定n个用户组成的用户集合$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，m个基站组成的基站集合$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，为方便，直接使用符号$u_i(1\leqslant i\leqslant n)$和$b_j(1\leqslant j\leqslant m)$分别表示位于同一平面上的所有用户和基站的位置信息。每个基站$b\in B$发出的信号能够传输到的区域通常为圆形区域，记为$D=(b,r(D))$，简称圆盘，其中基站b为圆盘D的中心，$r(D)$表示圆盘的半径。若用户$u\in U$与基站b之间的距离不超过$r(D)$，则称基站b覆盖用户u。另外，单位时间内基站b发射信号所消耗的能量$p(b)$由覆盖半径$r(D)$决定，并满足能量方程$p(b)=cr(D)^{\alpha}$，其中系数$c>0$和衰减系数$\alpha\geqslant 1$为由发射信号类型确定的常系数。在最小能量覆盖问题中，所有基站发射的都是同种信号，从而它们均为相同的常系数。最小能量覆盖问题的目标是要为每个基站确定一个覆盖半径，使得每个用户至少被一个基站覆盖，且单位时间内所有基站消耗的总能量$\sum_{b\in B}p(b)$达到最小。在最小能量覆盖问题中，为保证每一个问题实例都存在可行解，一般假设每个基站的覆盖半径可以没有限制。文献 [4] 针对$\alpha=2$的情况设定了一个 9-近似算法。文献 [5] 利用原始对偶技术设计了一个常数近似算法。文献 [6] 证明了当衰减系数满足$\alpha\geqslant 2$时该问题是 NP-难的，并针对$\alpha\geqslant 1$的情况，利用几何分析给出了一个多项式时间近似方案。文献 [7] 证明了在衰减系数满足$2>\alpha>1$时，问题也是 NP-难的。文献 [8] 利用平面划分技术针对$\alpha=1$的情况设计了一个多项式时间近似方案。

近年来，人们对最小能量覆盖问题的各种变型或推广形式进行了广泛研究，包括最小能量部分覆盖问题、奖励收集最小能量覆盖问题、最小能量多重覆盖问题等。与最小能量覆盖问题相比，最小能量部分覆盖问题并不要求覆盖所有用户，而是要求至少覆盖其中$k\leqslant n$个用户。当衰减系数$\alpha=2$时，文献 [4] 设计了一个$(12+\varepsilon)$-近似算法，其中$\varepsilon>0$为任意常数。当衰减系数$\alpha\geqslant 1$时，文献 [9] 利用原始对偶方法设计了一个3^{α}-近似算法。文献 [10] 通过分析圆盘的几何性质并引入松弛独立集，设计了一个$O(\alpha)$-近似算法。

奖励收集最小能量覆盖问题又是最小能量部分覆盖问题的推广形式，对于没有被基站覆盖的用户需要在目标函数中增加相应的惩罚权重，根据惩罚函数的性质不同，又可以再进一步细分为一些子问题。文献 [11] 基于原始对偶算法设计了一个3^{α}-近似算法求解带惩罚费用的最小能量部分覆盖问题。对h-奖励收集能量覆盖问题，文献 [12] 利用原始对偶和拉格朗日松弛技术设计了一个$(4\cdot 3^{\alpha-1}+\varepsilon)$-近似算法。当惩罚函数为次模函数时，文献 [13] 研究平面上带次模惩罚的最小能量部分覆盖问题，并设计了一个$(5\times 2^{\alpha+1})$-近似算法。

最小能量多覆盖问题是最小能量覆盖问题的另一种推广形式，在该问题中对每个用户增加了覆盖次数的最低要求。文献 [14] 研究了该问题的一种特殊情况，其中衰减系数$\alpha=2$，并且所有用户的覆盖次数要求同为d，设计了近似比不超过$23.02+63.91(d-1)$的近似算法求解。文献 [15] 利用局部比方法设计了一个$(3^{\alpha}d_{\max})$-近似算法求解最小能量多覆盖问题，其中$d_{\max}$表示所有用户覆盖次数的最大值。文献 [16] 又设计了一个近似比不超过$4\times(27\sqrt{2})^{\alpha}$的近似算法。文献 [17] 改进了此算法，进一步设计出$2\times(12\cdot 9)^{\alpha}$-近似算法。文献 [18] 研究了无线传感器网络中最小能量部分多重覆盖问题，设计了一个多项式时间近似方案（PTAS）。文献 [19] 研究了带软容量的圆盘多覆盖问题，并设计了一个 4-近似算法。

在随机优化中，两阶段模型是处理不确定型组合优化问题的一种常用方法，广泛应用于生产和供应链管理、金融、能源等领域。这种模型将决策过程分为两个阶段，第一阶段在不确定性因素（如需求、成本、资源可用性等）实现之前做出决策。在第一阶段做出决策之后，一些不确定性因素发生，

基于这些已发生的不确定性因素，需要做出第二阶段的决策，从而把第一阶段的决策扩充为整个两阶段问题模型的可行解，其目标是使得第一阶段决策的成本和第二阶段决策的期望成本之和达到最小。两阶段随机优化模型是一种流行的随机模型，可以用于解决很多组合优化问题，文献 [20] 研究了一种经典的两阶段随机优化问题模型——随机集合覆盖问题，他们利用随机集合覆盖问题与集合覆盖问题之间的关系，证明了该问题存在$O(\lg mn)$-近似算法求解。文献 [21] 设计了一个$2(\ln n+1)$-近似算法求解随机集合覆盖问题。文献 [22] 又设计了一个近似比为$H(n)$的贪婪算法求解该问题。将随机集合覆盖问题拓展可得带次模惩罚的随机集合覆盖问题，文献 [23] 利用原始对偶算法针对该问题给出了2η-近似算法，其中η为元素在集合中出现的最大频率。

受上述问题启发，本文研究带有限场景的随机最小能量多覆盖问题，简称随机能量多覆盖问题。首先建立了该问题的整数规划描述，并结合两阶段模型以及最小能量多覆盖问题的求解策略，设计了一个近似算法求解此问题。

1 问题描述

随机能量多覆盖问题具体定义如下：给定用户集U、基站集B，指定k种可能发生的场景，k以n的某个多项式函数为界。每个基站发射信号形成圆盘覆盖区域$D=(b,r(D))$，对每个场景$j\in\{1,2,\cdots,k\}$，定义p_j, U_j和F_j，由于不同场景的用户具有不同属性，因此需要适配不同类型的信号，故定义c_j和α_j。场景j中的每个用户u需要被适配信号j覆盖至少$d_{u,j}$次，每个用户u至多只能被同一基站发出的同种适配信号覆盖一次。基于已知的概率分布及覆盖要求，选择一组在后续可能发生的场景中高概率被覆盖的用户U_0，这里U_0也可能为空集。根据U_0中所有用户的属性，可设置一种U_0中所有用户都能适配的通用信号，为方便，称为第 0 种信号。在随机能量多覆盖问题中，可行解是一个圆盘集族$S=\{S_0,S_1,\cdots,S_k\}$，这族圆盘能够按照覆盖次数要求覆盖k个场景中的所有用户，随机能量多覆盖问题的目标是要寻找一个可行解S，使得期望消耗的能量总和$\sum_{j=0}^{k}\sum_{D\in S_j}p_jc_jr(D)^{\alpha_j}$达到最小，具体符号说明见表 1。

其中值得注意的是在随机能量多覆盖问题中，部分基站允许同时发送通用信号和若干专用信号，但每种信号也至多只能以某一覆盖半径发射一组，考虑到各个基站的性能不同，并非每个基站都能发射所有类型的信号，于是，可行解S中的每个圆盘集S_j必须满足$S_j\subseteq F_j$。引入术语“使用圆盘$D=(c(D),r(D))$发射信号j”表示使用基站$c(D)$发射覆盖半径为$r(D)$的信号j。

表 1 符号说明

符号	说明
$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$	n个用户组成的集合
$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$	m个基站组成的集合
U_0	在后续可能发生的场景中高概率被覆盖的用户
p_j	场景j发生的概率
U_j	在场景j中需要被覆盖的用户集
$U_j(D)$	圆盘D发射信号j覆盖的所有U_j中的用户
c_j	在场景j中能量方程的系数
α_j	在场景j中能量方程的衰减系数
$\alpha^*=\max\{\alpha_j\|j=0,1,\cdots,k\}$	表示所有$k+1$种信号衰减系数的最大值
$d_{u,j}$	用户u在场景j中的覆盖要求
$d_{\max,j}=\max\{d_{u,j}\|u\in U_j\}$	U_j中所有用户覆盖次数的最大值
$d_{\max}=\max\{d_{\max,j}\|j=1,2,\cdots,k\}$	所有场景中全部用户覆盖次数的最大值
S_j	以基站为中心的圆盘集
$S=\{S_0,S_1,\cdots,S_k\}$	随机能量多覆盖问题的一个可行解
$D=(b,r(D))$	以基站为中心、半径为$r(D)$的圆盘D
$c(D)$	圆盘D的中心基站
$S^*=\{S_0^*,S_1^*,\cdots,S_k^*\}$	随机能量多覆盖问题的最优解
$I=(U,F,k,d)$	随机能量多覆盖问题的一个实例
F_j	能发射信号j的基站为中心的圆盘集合
$w_j(D)=p_jc_jr(D)$	使用圆盘D发射信号j的期望消耗能量
$U_j(H_j)=\cup_{D\in H_j}U_j(D)$	圆盘集$H_j\subseteq F_j$覆盖的所有U_j中的用户
$w_j(H_j)=\sum_{D\in H_j}w_j(D)$	H_j中所有圆盘“发射”信号j的期望消耗能量总和
$H_j(u)=\{D\in H_j\|u\in U_j(D)\}$	圆盘集H_j中覆盖用户u的所有圆盘
$\|H_j(u)\|$	圆盘集H_j覆盖用户u的次数
$\|H(u)\|=\|(H\cap F_0)(u)\|+\|(H\cap F_j)(u)\|$	圆盘集H覆盖用户u的次数

另外，对于最优解S^*中的每个圆盘$D\in S_j^*$（$j=0,1,\cdots,k$），至少存在一个用户$u\in U_j$位于该圆盘的边界上，否则，可以减少圆盘D的半径并使用半径更小的圆盘覆盖相同用户集，进而得到期望消耗能量更少的一个可行解，这与最优性矛盾。另外，每个场景U_j至多包含所有n个用户。因此，对于能够发射信号j的每个基站而言，以它为中心并且发射信号j的圆盘至多只需要考虑n个即可，把需要考虑的能发射信号j的所有不同圆盘记为F_j，显

然，F_j中至多包含mn个不同的圆盘。令$F=\bigcup_{j=1}^{k}F_j$表示所有场景中需要考虑的不同圆盘的全体，那么F中至多包含kmn个不同的圆盘，注意中心和半径都相同但发射信号不同的圆盘被视为不同圆盘。

对于随机能量多覆盖问题的一个实例，对任意信号$j=0,1,\cdots,k$，圆盘$D\in F$，用户$u\in U_j$，圆盘集$H_j\subseteq F_j$以及圆盘集$H\subseteq F$，继续定义下述符号。

1）若$u\in U_j\cap U_0$，则：

$$H(u)=\left\{D\in H|u\in U_0(D)\cup U_j(D)\right\}=(H\cap F_0)(u)\cup(H\cap F_j)(u)$$

2）$d_{u,0}=\max\left\{d_{u,j}|u\in U_j,j=1,2,\cdots,k\right\},u\in U_0$

对每个用户$u\in U_0$定义$d_{u,0}$是为了方便算法中使用独立集的概念，并非定义一种新场景下的覆盖次数要求，U_0也并非实际场景。此外，如果用户$u\in U_j$被至少d组通用信号 0 或专用信号j覆盖，则称u被d-覆盖，其中同种信号必须来自不同基站。进一步，若$d\geqslant d_{u,j}$，则称u被完全覆盖。对每个场景$j\in\{1,2,\cdots,k\}$，称圆盘集$H\subseteq F$是场景j中的一个d-独立集，若满足：1）对每个用户$u\in U_j$，H中覆盖u的圆盘数目不超过d，即$|H(u)|\leqslant d$；2）H中不包含中心为同一基站的圆盘，称圆盘集$H\subseteq F$是场景j中的一个d-独立集。

根据随机能量多覆盖问题的定义可知，当场景数量$k=1$，概率$p_k=1$时，随机能量多覆盖问题就变成了最小能量多覆盖问题。由于该问题是 NP-难的[15]，从而随机能量多覆盖问题也是 NP-难的。若进一步令所有用户的覆盖次数均一致且都为 1 时，则随机能量多覆盖问题进一步变为最小能量覆盖问题，这意味着随机能量多覆盖问题也是最小能量覆盖问题的一种推广形式。同时正是因为最小能量覆盖问题是随机能量多覆盖问题的一种特殊情况，很多原本在最小能量覆盖问题中效果较好的方法在该问题中变得并不适用。

2　整数规划

本节进一步给出随机能量多覆盖问题的整数规划，以便能够更精确地理解问题模型。对每个场景j下的用户集U_j，若用户$u\in U_j\backslash U_0$，则该用户只能适配信号j，即只能使用F_j中的圆盘发送信号j覆盖，且一个圆盘至多只能覆盖一次用户$u\in U_j\cap U_0$。若$u\in U_j\cap U_0$，则u能同时适配专用信号j和通用信号 0，从而既可以使用F_j中的圆盘发送专用信号j覆盖，也可以使用F_0中的圆盘发送通用信号 0 覆盖；进一步，若此时圆盘集F_j与F_0中存在中心和半径相同的圆盘D，则D可同时发射信号j和信号 0 覆盖u至多 2 次。对任意圆盘$D\in F_j$，用变量x_D表示发射信号j的圆盘D是否被选入可行解中，即：

$$x_D=\begin{cases}1 & \text{选择发射信号}j\text{的圆盘}D\\ 0 & \text{不选择发射信号}j\text{的圆盘}D\end{cases}\tag{1}$$

式中，$j=0,1,\cdots,k$。注意，对F_j中的每个圆盘，需要发射信号j已被规定为它的固有属性，圆盘记号中不再标注发射的信号类型。从而，可建立随机能量多覆盖问题的下述整数线性规划：

$$\begin{aligned}\min\ &\sum_{D:D\in F_0}c_0r(D)^{\alpha_0}x_D+\sum_{j=1}^{k}\sum_{D:D\in F_j}p_jc_jr(D)^{\alpha_j}x_D\\ &\sum_{\substack{D:D\in F_0\\ u\in U_0(D)}}x_D+\sum_{\substack{D:D\in F_j\\ u\in U_j(D)}}x_D\geqslant d_{u,j}\\ &\forall u\in U_0\cap U_j,j\in\{1,2,\cdots,k\}\\ \text{s.t.}\ &\sum_{\substack{D:D\in F_j\\ u\in U_j(D)}}x_D\geqslant d_{u,j},\forall u\in U_j\backslash U_0,j\in\{1,2,\cdots,k\}\\ &\sum_{\substack{D:D\in F_j\\ c(D)=b}}x_D\leqslant 1,\forall b\in B,j\in\{0,1,\cdots,k\}\\ &x_D\in\{0,1\},\forall j\in\{0,1,\cdots,k\},D\in F\end{aligned}\tag{2}$$

式中，第 3 个约束表示每个基站b至多发射一组信号j，排除同一基站发射两种覆盖半径的同类信号的情况。此外，本文也给出上述整数规划的一个松弛线性规划，具体描述如下：

$$\begin{aligned}\min\ &\sum_{D:D\in F_0}c_0r(D)^{\alpha_0}x_D+\sum_{j=1}^{k}\sum_{D:D\in F_j}p_jc_jr(D)^{\alpha_j}x_D\\ &\sum_{\substack{D:D\in F_0\\ u\in U_0(D)}}x_D+\sum_{\substack{D:D\in F_j\\ u\in U_j(D)}}x_D\geqslant d_{u,j}\\ &\forall u\in U_0\cap U_j,j\in\{1,2,\cdots,k\}\\ \text{s.t.}\ &\sum_{\substack{D:D\in F_j\\ u\in U_j(D)}}x_D\geqslant d_{u,j},\forall u\in U_j\backslash U_0,j\in\{1,2,\cdots,k\}\\ &\sum_{\substack{D:D\in F_j\\ c(D)=b}}x_D\leqslant 1,\forall b\in B,j\in\{0,1,\cdots,k\}\\ &x_D\geqslant 0,\forall j\in\{0,1,\cdots,k\},D\in F\end{aligned}\tag{3}$$

3　近似算法

随机能量多覆盖问题的实例$I=(U,F,k,d)$，在为各个场景下的用户集确定满足覆盖次数的圆盘集

时，其决策具有一定的独立性。为了能够找到满足近似比的圆盘集完全覆盖U_j中的所有用户，利用最小点覆盖问题求解算法中的分层策略和度权概念[24]，对F_j中的每个圆盘D，将其期望消耗能量$w_j(D)$分解为一系列度权$w_j^1(D),w_j^2(D),\cdots,w_j^h(D)$。假设所设计算法输出圆盘集族$S=\{S_0,S_1,\cdots,S_k\}$，最优解为圆盘集族$S^*=\{S_0^*,S_1^*,\cdots,S_k^*\}$。若对每个度权函数$w_j^i(\cdot)$都能证明$w_j^i(S_j)\leqslant\gamma w_j^i(S_j^*)$，则$w_j(S_j)=\sum_{i=1}^{h}w_j^i(S_j)\leqslant\gamma\sum_{i=1}^{h}w_j^i(S_j^*)=\gamma w_j(S_j^*)$成立，其中$\gamma$是一个常数。对每个场景都运用此策略，便可设计出求解随机能量多覆盖问题的近似算法。另外，圆盘集F_0中的圆盘也需要将其权重分解为度权，并作为覆盖$U_j\cap U_0$中的用户的候选圆盘。在算法的最后部分，为了删除发射同种信号的多余同心圆盘，以及减小圆盘集合的期望消耗能量，利用$d_{\max,j}$-独立集的概念进一步筛选各圆盘集合中的候选圆盘。算法具体叙述如下。

算法 1　SPMC

输入：实例$I=(U,F,k,d)$

输出：圆盘集族$S=\{S_0,S_1,\cdots,S_k\}$

1: for $j:=1$ to k do

2:　$B_j:=\varnothing$，$X_j:=U_j\backslash U_0$，$i:=0$

3:　while $X_j\neq\varnothing$ do

4:　　令$i:=i+1,\bar{w}_i:=\min_{D:D\in F_j\backslash B_j}\dfrac{w_j(D)}{|U_j(D)\cap X_j|}$，并把达到最小比值$\bar{w}_i$的圆盘全体记为$Y_i$

5:　　for all $D\in F_j$ do

6:　　若$w_j(D)>0$，令$w_j^i(D):=\bar{w}_i|U_j(D)\cap X_j|$

否则，表明$w_j(D)=0$，令$w_j^i(D):=0$

7:　　令$w_j(D):=w_j(D)-w_j^i(D)$// Y_i中每个圆盘D的权重$w_j(D)$减小为 0。

8:　　end for

9:　　令$B_j:=B_j\cup Y_i$

10:　令$X_j:=X_j\backslash\{u\in X_j|u$已被$B_j$完全覆盖$\}$

//删除X_j被圆盘集B_j完全覆盖的用户

11: end while

12: end for

13: 令$B_0:=\varnothing X_0:=\cup_{j=1}^{k}\{u\in U_j|u$未被$B_j$完全覆盖$\}$，$i:=0$

14: while $X_0\neq\varnothing$ do

15:　令$i:=i+1$，$\bar{w}_i:=\min_{D:D\in D_0\backslash B_0}\dfrac{w_0(D)}{|U_0(D)\cap X_0|}$，并把达到最小比值$\bar{w}_i$的圆盘全体记为$Y_i$

16:　for all $D\in F_0$ do

17:　　若$w_0(D)>0$，令$w_0^i(D):=\bar{w}_i|U_0(D)\cap X_0|$

否则，表明$w_0(D)=0$，令$w_0^i(D):=0$

18:　　令$w_0(D):=w_0(D)-w_0^i(D)$// Y_i中每个圆盘D的权重$w_0(D)$减小为 0

19:　end for

20:　令$B_0:=B_0\cup Y_i$

21:　令$X_0:=X_0\backslash\{u\in X_0|u$已被$\cup_{j=0}^{k}B_j$完全覆盖$\}$// 删除$X_0$中被$\cup_{j=0}^{k}B_j$完全覆盖的用户

22: end while

23: for $j:=0$ to k do

24:　令$J_j:=\varnothing$

25:　while $B_j\neq\varnothing$ do

26:　　$D_{\max,j}:=\arg\max_{D:D\in B_j}r(D)$//从当前$B_j$中找出半径最大的圆盘记为$D_{\max,j}$

27:　　if $J_j\cup\{D_{\max,j}\}$是$d_{\max,j}$-独立集 then

28:　　令$J_j:=J_j\cup\{D_{\max,j}\}$

29:　　end if

30:　令$B_j:=B_j\backslash\{D_{\max,j}\}$

31:　end while

32:　$S_j:=\{\bar{D}=(c(D),3r(D))|D=(c(D),r(D))\in J_j\}$

33: end for

34: Output 圆盘集族$S=\{S_0,S_1,\cdots,S_k\}$

由于判断实例$I=(U,F,k,d)$是否存在可行解是非常容易的，为了描述简单，算法 1 仅考虑可行解存在的情况。事实上，根据问题的定义以及整数规划模型，实例I存在可行解，当且仅当每个用户集U_j和圆盘集F_j与F_0满足：1）对$U_j\backslash U_0$中每个用户u，F_j中不相同的基站中心数不少于覆盖次数$d_{u,j}$；2）对$U_j\cap U_0$中每个用户u，F_j中不相同的基站中心数与F_0中不相同的基站中心数之和不少于覆盖次数$d_{u,j}$。在引理 1 中先证明了算法 1 确实能够找到实例I的一个可行解。

引理 1　算法 1 能确定随机能量多覆盖问题的任意实例$I=(U,F,k,d)$的一个可行解。

证明：如上所述，这里只考虑实例$I=(U,F,k,d)$存在可行解的情况。对实例I运用算法 1 后，生成的圆盘集族$\bar{B}=\{B_0,B_1,\cdots,B_k\}$必定是$I$的一个可行解。因为在可行解存在的前提下，$U_j\backslash U_0$中的每个用户$u$一定会被圆盘集$B_j$完全覆盖，$U_j$中剩余没有被完全覆盖的用户一定是$U_j\cap U_0$中的用户，在增加圆盘集$B_0$后，这些用户一定会被$B_j\cup B_0$完全覆盖。此时，每个$B_j(j=0,1,\cdots,k)$中可能存在一些同

心圆盘，但由于每个场景下可用的基站是充分的，以保证存在可行解，而算法中的第 10 行与第 21 行，每个用户只有在被不同基站发射的适配信号完全覆盖时，才会从集合中删除，故圆盘集族$\bar{B}$一定是可行解。下面证明圆盘集族$S=\{S_0,S_1,\cdots,S_k\}$仍是一个可行解。

只需对任意用户$u\in U_j,j=\{1,2,\cdots,k\}$，证明$S_j\cup S_0$完全覆盖$u$即可。当圆盘集$J_j\cup J_0$完全覆盖$u$时，即$\left|(J_j\cup J_0)(u)\right|\geqslant d_{u,j}$，圆盘集$S_j\cup S_0$显然完全覆盖$u$。下面讨论$\left|(J_j\cup J_0)(u)\right|<d_{u,j}$的情况，不妨假设$\left|(J_j\cup J_0)(u)\right|=d_{u,j}-1$，并令$d_{u,j}-1=t$。那么，圆盘集$J_j\cup J_0$中恰好存在$t$个圆盘$D_1^j,D_2^j,\cdots,D_l^0D_{l+1}^0D_{l+2}^0,\cdots,D_t^0$覆盖$u$共$t$次，其中$D_1^j,D_2^j,\cdots,D_l^j$是$J_j\subseteq B_j$内中心互不相同的圆盘，$D_{l+1}^0D_{l+2}^0,\cdots,D_t^0$是$J_0\subseteq B_0$内中心互不相同的圆盘，并且$0\leqslant l\leqslant t$。因为圆盘集$B_j\cup B_0$完全覆盖$u$，故下述两个情况至少有一个成立：1）$\mathcal{B}_j$中存在与$D_1^j,D_2^j,\cdots,D_l^j$中心互不相同且覆盖$u$的圆盘没有被选入$J_j$中，记之为$D_0^j$；2）$B_0$中存在与$D_{l+1}^0D_{l+2}^0,\cdots,D_t^0$中心互不相同且覆盖$u$的圆盘没有被选入$J_0$中，记之为$D_{t+1}^0$。下面分两种情况证明。

情况 1　若$\mathcal{B}_j$中存在与$d_{\max,j}$-独立集J_j内$D_1^j,D_2^j,\cdots,D_l^j$中心互不相同且覆盖u的圆盘D_0^j没有被选入J_j中，这意味着把圆盘D_0^j加入J_j中后，会使其变为非$d_{\max,j}$-独立集J_j。那么，在第 25 行~31 行的迭代中，当判断圆盘D_0^j能否放入J_j时，下述两种情况至少有一个会出现。

情况 1（A）　在判断圆盘D_0^j能否放入J_j之前，已存在一个半径更大且与D_0^j相同中心的圆盘$\hat{D}_0^j$先被放入J_j中，这是因为迭代过程优先考虑当前B_j内半径最大的圆盘。则$\hat{D}_0^j$可以替代D_0^j，与$D_1^j,D_2^j,\cdots,D_l^0D_{l+1}^0D_{l+2}^0,\cdots,D_t^0$一起完全覆盖$u$，并且它们都是$J_j\cup J_0$内的圆盘，这与假设矛盾。

情况 1（B）　在判断圆盘D_0^j能否放入J_j时，放入圆盘D_0^j会导致U_j内另一用户$u'\neq u$被当前圆盘集J_j覆盖的次数超过$d_{\max,j}$，这意味着$u\neq u'\in U_j(D_0^j),\left|\left(J_j\cup\left\{D_0^j\right\}\right)(u')\right|\geqslant d_{\max,j}+1$成立。从而，在考虑圆盘$D_0^j$之前，已经有$d_{\max,j}$个中心互不相同并且覆盖用户$u'$的圆盘$\hat{D}_1^j,\hat{D}_2^j,\cdots,\hat{D}_{d_{\max,j}}^j$被加入$J_j$中。因$B_j$中半径大的圆盘会被优先考虑，故$r(\hat{D}_i^j)\geqslant r(D_0^j)(i=0,1,\cdots,d_{\max,j})$成立。又因$u,u'\in U_j(D_0^j)$，故它们之间的距离不超过$2r(\hat{D}_0^j)$，再根据$d_{\max,j}$的定义可知，$d_{u,j}\leqslant d_{\max,j}$也成立。从而$\left\{\bar{D}_i^j=(c(\hat{D}_i^j),3r(\hat{D}_i^j))|i=1,2,\cdots,d_{\max,j}\right\}$完全覆盖$u$。因为$\left\{\hat{D}_1^j,\hat{D}_2^j,\cdots,\hat{D}_{d_{\max,j}}^j\right\}\subseteq J_j$，因此，圆盘集$S_j\supseteq\left\{\bar{D}_1^j,\bar{D}_2^j,\cdots,\bar{D}_{d_{\max,j}}^j\right\}$也完全覆盖$u$。

情况 2　当B_0中存在与$d_{\max,0}$-独立集J_0内$D_{l+1}^0D_{l+2}^0,\cdots,D_t^0$的中心互不相同且覆盖$u$的圆盘$D_{t+1}^0$没有被选入$J_0$时，可以按照情况 1 的方法直接得到证明，这里省略具体细节。

综合上述两种情况，并根据用户u的任意性可知，算法 1 输出的圆盘集族$S=\{S_0,S_1,\cdots,S_k\}$是实例I的一个可行解，引理 1 成立。

下面继续分析输出解$S=\{S_0,S_1,\cdots,S_k\}$与最优解$S^*=\left\{S_0^*,S_1^*,\cdots,S_k^*\right\}$之间的差距。

定理 1　算法 1 是求解随机能量多覆盖问题的$(3^{\alpha^*}\cdot d_{\max})$-近似算法。

证明：对$j=0,1,\cdots,k$，先证$w_j(J_j)\leqslant d_{\max}w_j(S_j^*)$。假设算法中计算圆盘集$B_j$时共执行了$h$次迭代，即$B_j$中每个圆盘的$D$的权重被分解成$h$个度权$w_j^1(D),w_j^2(D),\cdots,w_j^h(D)$，满足$w_j(D)=\sum_{i=1}^{h}w_j^i(D)$。对应地，使用$B_j^1,B_j^2,\cdots,B_j^h$依次表示每次迭代结束时圆盘集$B_j$的取值，使用$X_j^1,X_j^2,\cdots,X_j^h$依次表示每次迭代结束时用户集$X_j$的取值。注意每一个$B_j^i$是由$\mathcal{D}_j$中所有$w_j(\cdot)$权重已减至 0 的圆盘构成的。根据算法可知圆盘集$J_j\subseteq B_j$，故上述度权分解对圆盘集$J_j$中的每个圆盘也成立。下面针对每个度权函数$w_j^i(\cdot)$进行证明：任取$i\in\{1,2,\cdots,h\}$，有：

$$\begin{aligned}w_j^i(J_j)&=\sum\nolimits_{D:D\in J_j}w_j^i(D)=\\&\sum\nolimits_{D:D\in J_j\backslash B_j^{i-1}}w_j^i(D)=\\&\sum\nolimits_{D:D\in J_j\backslash B_j^{i-1}}\bar{w}_i\left|U_j(D)\cap X_j^{i-1}\right|=\\&\bar{w}_i\sum\nolimits_{u:u\in X_j^{i-1}}\left|\{D\in J_j\backslash B_j^{i-1}|u\in U_j(D)\}\right|\leqslant\\&\bar{w}_i\left|X_j^{i-1}\right|d_{\max,j}\leqslant\bar{w}_i\left|X_j^{i-1}\right|d_{\max}\end{aligned}\tag{4}$$

式中，第 2 个等号成立，是因为在第i次迭代时，B_j^{i-1}中所有圆盘D的权重$w_j(D)=0$，故$w_j^i(D)=0$。

注意度权函数$w_j^i(\cdot)$是定义在整个圆盘集F_j上的，而$S_j^*\subseteq F_j$，即最优解S^*的圆盘集S_j^*内的每个圆盘D都有权重$w_j^i(D)$。因迭代次数$i\leqslant h$，故在第$i-1$次迭代结束时计算出的X_j^{i-1}必定不是空集。这

表明B_j^{i-1}并不能完全覆盖X_j^{i-1}中的用户，然而，S_j^*必定完全覆盖了X_j^{i-1}中的用户。因此，$S_j^*\backslash B_j^{i-1}$必定不为空集，并且其中的圆盘必定覆盖$X_j^{i-1}$中的每个用户至少 1 次，于是：

$$w_j^i(S_j^*)=\sum_{D:D\in S_j^*}w_j^i(D)=\sum_{D:D\in S_j^*\backslash B_j^{i-1}}\bar{w}_i\left|U_j(D)\cap X_j^{i-1}\right|=\bar{w}_i\sum_{u:u\in X_j^{i-1}}\left|\{D\in S_j^*\backslash B_j^{i-1}|u\in U_j(D)\}\right|\geqslant\bar{w}_i\left|X_j^{i-1}\right| \quad (5)$$

综上可得，$w_j^i(J_j)\leqslant\bar{w}_i\left|X_j^{i-1}\right|d_{\max}\leqslant d_{\max}w_j^i(S_j^*)$。根据$i$的任意性可得：

$$w_j(J_j)=\sum_{i=1}^{h}w_j^i(J_j)\leqslant\sum_{i=1}^{h}d_{\max}w_j^i(S_j^*)=d_{\max}w_j(S_j^*) \quad (6)$$

根据j的任意性，有$\sum_{j=0}^{k}w_j(J_j)\leqslant d_{\max}\sum_{j=0}^{k}w_j(S_j^*)$也成立。又因算法输出的圆盘集族$S=\{S_0,S_1,\cdots,S_k\}$是通过把圆盘集族$J=\{J_0,J_1,\cdots,J_k\}$中每个圆盘的半径扩大至原来的 3 倍得到的，再结合能量方程式 (1) 得：

$$\sum_{j=0}^{k}w_j(S_j)\leqslant 3^{\alpha^*}\sum_{j=0}^{k}w_j(J_j)\leqslant 3^{\alpha^*}d_{\max}\sum_{j=0}^{k}w_j(S_j^*) \quad (7)$$

式中，$\alpha^*=\max\left\{\alpha_j|j=0,1,\cdots,k\right\}$，表示所有$k+1$种信号衰减系数的最大值。

4 应用举例

为了方便进一步理解算法的步骤，下面给出一个例子。给定平面上 5 个用户点构成的集合$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，5 个基站构成的集合$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$以及两个后续可能出现的场景。其中$U_0=\{u_1,u_3\}$，$B_0=\{b_5\}$，$c_0=3$，$\alpha_0=3$；$U_1=\{u_1,u_2,u_3,u_5\}$，$B_1=\{b_1,b_2,b_3\}$，$p_1=2/3$，$c_1=2$，$\alpha_1=2$；$U_2=\{u_3,u_4,u_5\}$，$B_2=\{b_3,b_4\}$，$p_2=1/2$，$c_2=1$，$\alpha_2=1$。另外基站与用户点之间距离如图 1 所示。不同用户点在不同场景下的覆盖需求分别为：$d(u_1,1)=2$，$d(u_2,1)=1$，$d(u_3,1)=3$，$d(u_5,1)=2$，$d(u_3,2)=2$，$d(u_4,2)=2$，$d(u_5,2)=1$，下面将根据算法 1 的步骤，通过以下 4 步来解决这个问题。

1）首先处理场景 1 中的用户，$X_1=\{u_2,u_5\}$，第 1 次迭代，通过计算各个圆盘的权重得到$\bar{w}_1=16/3$，同时挑选出以b_1为中心，半径为 2 的圆盘$D_1=D(b_1,2)$，该圆盘能够覆盖用户u_2,u_3，并更新$X_1=\{u_5\}$；第 2 次迭代，通过计算得到$\bar{w}_2=20/3$，挑选出以b_3为中心，半径为 3 的圆盘$D_2=D(b_3,3)$，该圆盘能够覆盖用户u_3,u_5，此时更新后的X_1不变，仍为$X_1=\{u_5\}$；第 3 次迭代，$\bar{w}_3=28/3$，同时挑选出以b_3为中心，半径为 4 的圆盘$D_3=D(b_3,4)$，以b_2为中心，半径为 4 的两个圆盘D_4,D_5，这 3 个圆盘能够覆盖用户u_3,u_5，在此次迭代后，$X_1=\varnothing$，$\bar{B}_1=\{D_1,D_2,D_3,D_4,D_5\}$，迭代结束。

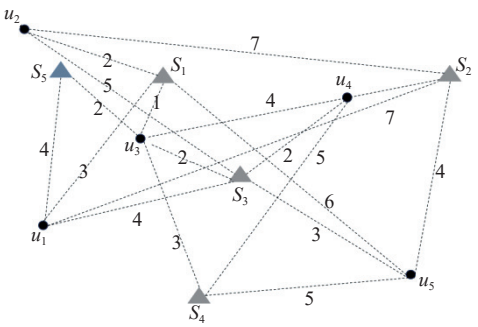


图 1 关于随机能量多覆盖的例子

2）对于场景 2 中的用户，$X_2=\{u_4,u_5\}$，第 1 次迭代，通过计算各个圆盘的权重得到$\bar{w}_1=3/4$，同时挑选出以b_3为中心，半径为 3 的圆盘$D_6=D(b_3,3)$，该圆盘能够覆盖用户u_3,u_4,u_5，更新$X_2=\{u_4\}$；第 2 次迭代，通过计算得到$\bar{w}_2=1/4$，挑选出以b_3为中心，半径为 2 的圆盘$D_7=D(b_3,2)$，该圆盘能够覆盖用户u_3,u_4，但值得注意的是，由于第 1 次和第 2 次挑选的圆盘均以b_3为中心，故对u_4来说并不满足 2-覆盖的条件，$X_2=\{u_4\}\neq\varnothing$，因此需要继续迭代。且经过计算此次迭代还会挑选出以b_3为中心半径为 2 的圆盘D_8放入$\bar{B}_2$中；第 3 次迭代$\bar{w}_3=3/4$，挑选出以b_4为中心，半径为 5 的圆盘$D_9=D(b_4,5)$，该圆盘能够覆盖用户u_3,u_4,u_5，在此次迭代后$X_2=\varnothing$，$\bar{B}_2=\{D_6,D_7,D_8,D_9\}$，迭代结束。

3）接下来处理到目前为止还未被完全覆盖的用户，$X_0=\{u_1\}$，第 1 次迭代，通过计算各个圆盘的权重得到$\bar{w}_1=192$，同时挑选出以b_5为中心，半径为 4 的圆盘$D_0=D(b_5,4)$，该圆盘能够覆盖用户u_1，更新$X_0=\varnothing$，$\bar{B}_0=\{D_0\}$，迭代结束。

4）下面开始处理每次循环中得到的圆盘集$\bar{B}_j$，对于$\bar{B}_0$，由于其包含 1 个圆盘D_0，故$S_0=\{D(b_5,12)\}$；对于$\bar{B}_1$，共包含 4 个圆盘，根据其中圆盘半径大小首先挑选圆盘$D_3=D(b_3,4)$进入J_1；随后根据顺序判断圆盘D_4，因为$\{D_4\cup D_3\}$仍为 3-独立集，故可以将D_4放入J_1；接下来判断D_5，由于圆盘

D_5和D_4中心为同一基站，故无法将D_5放入J_1，随后可以用同样的方法对D_1, D_2进行判断，将D_1放入J_1中，最终将J_1中圆盘半径扩大 3 倍得到S_1；用同样的方法可得$J_2=\{D_9, D_6\}$，$S_2=\{D(c(D), 3r(D))| D\in J_2\}$，经过上面的步骤可以输出该实例的可行解$S=\cup_{j=0}^{2}S_j$。

5　结束语

本文深入研究了随机能量多覆盖问题，它在环境监测、智能农业、建筑监控等领域具有广泛应用，是最小能量覆盖问题的推广形式，具有两阶段随机优化问题中的有限场景特征。通过利用“度权”函数与“分层”策略，把该问题实例中每个圆盘的权重分解为一系列度权，并分而治之地优先选择各场景中度权较小的圆盘，最后再筛选出半径较大、中心不同且足够完全覆盖用户的圆盘。基于此策略，设计出求解随机能量多覆盖问题的一个多项式时间$(3^{\alpha^*}d_{\max})$-近似算法，α^*和$d_{\max}$分别为信号衰减系数α和用户覆盖次数需求的最大值。

参 考 文 献

[1] ABUNIMA H, PARK W H, GLICK M B, et al. Two-stage stochastic optimization for operating a renewable-based microgrid[J]. Applied Energy, 2022, 325: 119848.

[2] BERTSIMAS D, SHTERN S, STURT B. Two-stage sample robust optimization[J]. Operations Research, 2022, 70(1): 624-640.

[3] 张得志, 乔馨, 李双艳, 等. 考虑多重覆盖的应急设施多级协同布局鲁棒优化[J]. 控制与决策, 2022, 37(7): 1853-1861.
ZHANG D Z, QIAO X, LI S Y, et al. Robust optimization of hierarchical cooperative layout of emergency facilities considering multiple coverage[J]. Control and Decision, 2022, 37(7): 1853-1861.

[4] FREUND A, RAWITZ D. Combinatorial interpretations of dual fitting and primal fitting[C]//International Workshop on Approximation and Online Algorithms. Berlin: Springer, 2003: 137-150.

[5] CHARIKAR M, PANIGRAHY R. Clustering to minimize the sum of cluster diameters[C]//Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: ACM, 2001: 1-10.

[6] BILÓ V, CARAGIANNIS I, et al. Geometric clustering to minimize the sum of cluster sizes[C]//Algorithms-ESA 2005: 13th Annual European Symposium, Palma de Mallorca. Spain: Springer, 2005: 460-471.

[7] ALT H, ARKIN E M, BRÖNNIMANN H, et al. Minimum cost coverage of point sets by disks[C]//Proceedings of the 22 Annual Symposium on Computational Geometry. New York: ACM, 2006: 449-458.

[8] LEV-TOV N, PELEG D. Polynomial time approximation schemes for base station coverage with minimum total radii[J]. Computer Networks, 2005, 47(4): 489-501.

[9] LI M H, RAN Y L, ZHANG Z. A primal-dual algorithm for the minimum power partial cover problem[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2022, 44(3): 1913-1923.

[10] DAI H, DENG B, LI W D, et al. A note on the minimum power partial cover problem on the plane[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2022, 44(2): 970-978.

[11] LIU X F, LI W D, XIE R T. A primal-dual approximation algorithm for the k-prize-collecting minimum power cover problem[J]. Optimization Letters, 2022, 16(8): 2373-2385.

[12] DAI H, LI W D, LIU X F. An approximation algorithm for the h-prize-collecting power cover problem[C]// International Workshop on Frontiers in Algorithmics. Hong Kong, China: Springer, 2022: 89-98.

[13] 刘晓非, 代涵, 李思哲, 等. 平面上带次模惩罚费用的最小能量部分覆盖问题[J]. 中国科学: 信息科学, 2022, 52(6): 947-959.
LIU X F, DAI H, LI S Z, et al. *k*-prize-collecting minimum power cover problem with submodular penalties on a plane[J]. SCIENTIA SIAICA Information, 2022, 52(6): 947-959.

[14] ABU-AFFASH A K, CARMI P, KATZ M J, et al. Multi cover of a polygon minimizing the sum of areas[J]. International Journal of Computational Geometry Applications, 2011, 21(6): 685-698.

[15] BAR-YEHUDA R, RAWITZ D. A note on multicovering with disks[J]. Computational Geometry, 2013, 46(3): 394-399.

[16] BHOWMICK S, VARADARAJAN K, XUE S K. A constant-factor approximation for multi-covering with disks[C]//Proceedings of the 29 Annual Symposium on Computational Geometry. New York: ACM, 2013: 243-248.

[17] BHOWMICK S, INAMDAR T, VARADARAJAN K. On metric multi-covering problems[EB/OL]. [2024-03-10]. https://arxiv.org/abs/1602.04152.

[18] RAN Y L, HUANG X H, ZHANG Z, et al. Approximation algorithm for minimum power partial multi-coverage in wireless sensor networks[J]. Journal of Global Optimization, 2021, 80(3): 661-677.

[19] DAI H. An Approximation algorithm for the minimum soft capacitated disk multi-coverage problem[C]// National Conference of Theoretical Computer Science. Singapore: Springer, 2022: 96-104.

[20] RAVI R, SINHA A. Hedging uncertainty: Approximation algorithms for stochastic optimization problems[J]. Mathematical Programming, 2006, 108: 97-114.

[21] LI J, LIU Y. Approximation Algorithms for stochastic combinatorial optimization problems[J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2016, 4(1): 1-47.

[22] PARTHASARATHY S. Adaptive greedy algorithms for stochastic set cover problems[EB/OL]. [2024-04-15]. https://arxiv.org/abs/1803.07639.

[23] SUN J, SHENG H, SUN Y, et al. Approximation algorithms for stochastic set cover and single sink rent-or-buy with submodular penalty[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2022, 44(4): 2626-2641.

[24] VAZIRANI V V. Approximation algorithms[M]. Berlin: Springer, 2001.

责任编辑　叶　芳