

非线性材料薄壁 I 形截面构件 相关屈曲变分模型

张劲逸^{1,2}, 白李^{1,2}, 王颖轶¹, 杨健^{1,2}, 王斐亮^{1,2}

(1. 上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 200240 上海;
2. 上海市公共建筑与基础设施数字化运维重点实验室, 200240 上海)

摘 要:冷弯薄壁构件极易受多种失稳模态相关作用的影响, 对不同截面形式及材料类型的构件相关屈曲力学机理研究亟需完善与发展。建立综合考虑材料非线性、几何非线性、整体初始几何缺陷及翼缘与腹板连接刚度等影响的薄壁 I 形截面细长构件精确变分模型, 并以此分析相关屈曲及后屈曲荷载-位移曲线, 极限承载力及板件局部屈曲波。结果表明: 材料名义屈服强度对构件后屈曲承载力影响较大; 整体初始缺陷对构件极限承载力影响较大, 对后屈曲承载力影响较小。板件局部屈曲波长随后屈曲承载力的下降而减小。采用变分模型对既有试验进行了模拟, 模拟结果与试验结果吻合度较高, 验证了模型的准确性。模型揭示了薄壁构件非线性整体-局部相关屈曲全过程力学机理, 为研究和设计提供理论基础。

关键词:结构稳定性; 薄壁构件; 相关屈曲; 材料非线性; Ramberg-Osgood 模型

中图分类号: TU392

文献标志码: A

文章编号: 1000-4939(2025)05-1036-13

Variational model on mode interaction in long I-section struts with material nonlinearity

ZHANG Jinyi^{1,2}, BAI Li^{1,2}, WANG Yingyi¹, YANG Jian^{1,2}, WANG Feiliang^{1,2}

(1. School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, 200240 Shanghai, China;
2. Shanghai Key Laboratory for Digital Maintenance of Building and Infrastructure, 200240 Shanghai, China)

Abstract: Cold-formed thin-walled members are vulnerable when two or more buckling modes are triggered simultaneously. Research on the mechanical behavior of interactive buckling in members with different types of cross-sections and materials needs to be developed. An accurate variational model of thin-walled I-section slender members is established, which comprehensively considers the effects of material nonlinearity, geometric nonlinearity, global initial geometric imperfections, and the stiffness of flange-web connections. Based on the presented model, the load-displacement curves, ultimate capacities, and local buckling waves are analyzed. The results show that the nominal yield strength of materials has a great influence on

收稿日期: 2023-01-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 52008244); 上海市科技创新项目 (No. 20DZ1201301; 21DZ1204704); 四川省区域创新合作项目 (No. 2022YFQ0048)

通信作者: 杨健, 教授. E-mail: j. yang. 1@sjtu. edu. cn

引用格式: 张劲逸, 白李, 王颖轶, 等. 非线性材料薄壁 I 形截面构件相关屈曲变分模型[J]. 应用力学学报, 2025, 42(5): 1036-1048.

ZHANG Jinyi, BAI Li, WANG Yingyi, et al. Variational model on mode interaction in long I-section struts with material nonlinearity[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2025, 42(5): 1036-1048.

the post buckling capacity of members. The global initial imperfection has a greater influence on the ultimate capacities of members, but a smaller influence on the post-buckling capacities. The local buckling wavelengths of the flanges decline as the post-buckling capacities decrease. Some published experiments are simulated by the variational model. The simulation results compare excellently with the experiment results, which verifies the accuracy of the model. The model reveals the mechanical mechanism in the whole process of nonlinear global-local mode interaction, providing theoretical foundation for structural design and further research.

Key words: structural stability; thin-walled member; mode interaction; material nonlinearity; Ramberg-Osgood model

冷弯薄壁构件具有板件局部屈曲、截面畸变屈曲及构件整体屈曲3种基本屈曲模式^[1-3]。在一定条件下,构件中还会出现不同屈曲模式的耦合作用,对承载力及后屈曲性能产生较大影响^[4-6]。近年来,许多学者对多种截面形式下薄壁构件相关屈曲性能进行了研究,包括卷边槽形截面^[7-9]、箱形截面^[10-11]、角钢截面^[12-13]、I形截面^[14-15]及加劲板^[16-17]等。多数文献中构件材料采用理想弹塑性或无屈服平台多折线本构模型。然而,不锈钢^[18]、铝合金^[19]等非线性金属材料的应力-应变曲线光滑连续,无明显屈服平台^[20]。许多研究者通过试验及数值方法对非线性金属材料构件的稳定问题进行研究^[21-22],但解析研究较为欠缺,且现存解析研究大多仅考虑单一屈曲模式^[23]。部分学者在解析研究中引入非线性材料 Ludwick 本构模型^[24],但鲜有考虑非线性金属材料 Ramberg-Osgood (简称 R-O) 本构模型^[25]的解析研究,主要因为 R-O 模型中应变是应力的不可逆函数,理论公式推导难度较高。BAI 等^[26]建立了箱形截面理想受压构件考虑 R-O 模型的相关屈曲变分模型,结果表明材料力学性能对构件相关屈曲的影响较大,采用有限元模拟进行模型验证,有限元结果与模型结果吻合度高。WADEE 等^[27]与 BAI 等^[28]采用解析法研究了初始几何缺陷对线性材料薄壁 I 形截面构件相关屈曲性能及承载力的影响。BAI 等^[29]采用解析法研究了翼缘与腹板连接刚度对线性材料薄壁 I 形截面理想受压构件相关屈曲的影响,而文献[26-28]中仅采用翼缘与腹板铰接简化假设。

鉴于对非线性金属材料薄壁构件相关屈曲解析研究较少,且考虑整体初始缺陷及非线性材料的解析法未见提及,本工作采用 Rayleigh-Ritz 方法,建立了适用于两端简支的薄壁 I 形截面细长构件发生整体与局部相关屈曲破坏模式的变分模型。本模型综

合考虑了几何非线性、材料非线性(R-O模型)、整体初始缺陷及翼缘与腹板间不同连接刚度。通过计算相关屈曲及后屈曲全过程荷载-位移曲线及板件屈曲波,研究了材料力学性能及缺陷幅值对相关屈曲后性能的影响,以期针对非线性材料薄壁构件相关屈曲的研究和设计公式的改进提供理论基础及参考数据。BECQUE^[30]对薄壁 I 形截面不锈钢构件相关屈曲性能开展了试验研究,并采用有限元软件对试验进行模拟,本研究将变分模型结果与文献[30]中的试验结果及有限元结果进行比较,以验证变分模型的有效性。

1 材料本构模型

非线性金属材料经典的连续本构模型为 R-O 模型,最早提出时原始形式^[25],即

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + K \left(\frac{\sigma}{E_0} \right)^n \quad (1)$$

式中: E_0 为初始杨氏模量; n 为材料硬化系数。式(1)经 HILL^[31]修正后形成经典 R-O 模型。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + 0.002 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^n \quad (2)$$

式中, $\sigma_{0.2}$ 为材料名义屈服强度。联立式(1)和式(2),得到 $\sigma_{0.2} = E_0 (0.002/K)^{1/n}$,因此参数 K 视为与名义屈服强度等效。引入应变线性分量 $\varepsilon_L = \sigma/E_0$ 并将其代入式(1)得

$$\varepsilon = \varepsilon_L + K \varepsilon_L^n \quad (3)$$

式(3)为非线性材料理想构件应变与其线性分量关系公式,应力-应变关系曲线如图所示。依此类推,假设切应变与其线性分量满足 $\gamma = \gamma_L + K(\gamma_L)^n$ 公式,其中 $\gamma_L = \tau/G_0$, G_0 为初始剪切模量。

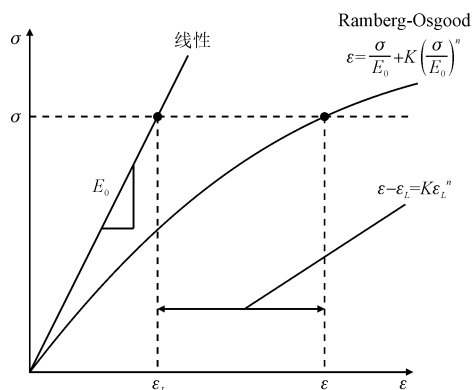


图1 一维 Ramberg-Osgood 应力-应变关系曲线

Fig. 1 One-dimensional Ramberg-Osgood stress-strain relationship

2 变分模型建立

本研究基于 Rayleigh-Ritz 方法,首先假设构件整体和板件局部连续位移函数,随后推导构件应变能及总势能公式,通过欧拉-拉格朗日方程及泛函驻值条件推导平衡微分方程及积分边界条件,最后求解相关屈曲全过程荷载-位移曲线及局部屈曲波。本研究模型求解涉及微分方程解的延拓及分岔,采

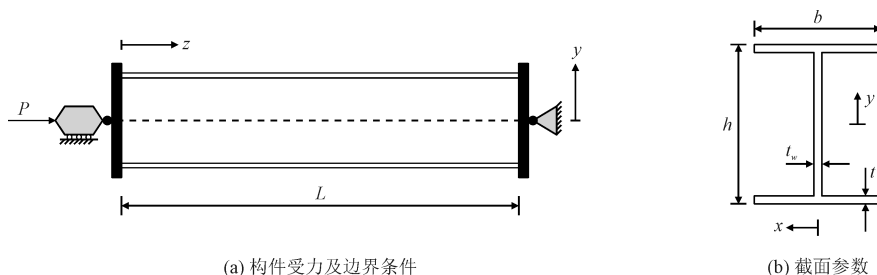
用软件 AUTO^[32] 计算数值解。

2.1 连续位移函数

薄壁 I 形截面细长构件由 2 个 C 形截面构件拼接而成,轴向压力通过刚性垫块均匀传导至截面,构件可自由绕强轴或弱轴弯曲,其余边界条件及截面参数如图 2 所示。

对细长构件,绕弱轴整体屈曲临界应力通常小于板件局部屈曲临界应力。由于腹板厚度为翼缘 2 倍,且腹板四边受约束,翼缘三边受约束一边自由,因此腹板屈曲临界应力远高于翼缘,假设腹板不发生局部屈曲。构件在受力过程中先发生整体屈曲,使腹板一侧翼缘受压(简称受压翼缘),另一侧翼缘受拉(简称受拉翼缘),随后受压翼缘发生局部屈曲,形成整体-局部模态耦合作用,受拉翼缘则不会发生局部屈曲。假设受拉翼缘与腹板铰接,受压翼缘与腹板通过扭转弹簧连接,如图 3(a)所示。

实际工程中翼缘与腹板连接刚度在零到正无穷之间,可用扭转弹簧刚度 c 模拟。对冷弯薄壁构件,将转角区等效为扭转弹簧,翼缘有效长度为 $2b_e$,如图 3(c)所示。



(a) 构件受力及边界条件

(b) 截面参数

图2 薄壁 I 形截面构件

Fig. 2 Thin-walled I-section strut

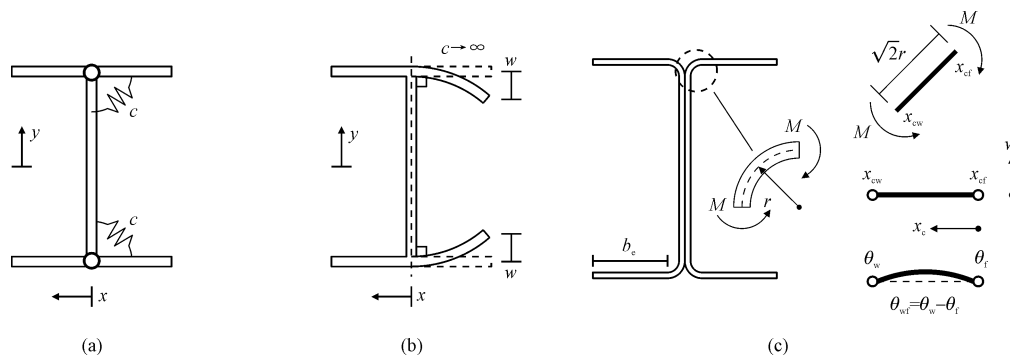


图3 翼缘与腹板连接方式

Fig. 3 Connection between flange and web

采用简化法估计刚度 c ,假设转角区为平板,在纵向均布弯矩作用下横向挠度为 w_c ,其 x_{cw} 端及 x_{cf} 端分别与腹板及翼缘相连。假设翼缘与腹板在其连

接处的相对转角等于截面 x_{cf} 与截面 x_{cw} 的相对转角。对单位长度平板, $d^2 w_c / dx_c^2 = M / D_c$ 为定值, $D_c = E_{c0} \cdot t^3 / [12(1 - \nu^2)]$ 为转角区初始刚度, E_{c0} 为转角区初

始弹性模量。因此,相对转角 $\theta_{wf} = ML_c/D_c$, 其中 $L_c = 2^{1/2}r$ 为平板等效宽度。 c 为单位转角下弹簧提供的弯矩,则

$$c = \frac{M}{\theta_{wf}} = \frac{D_c}{\sqrt{2}r} \quad (4)$$

对整体屈曲模态,考虑欧拉-伯努利梁理论,假设构件整体横向位移为 $W(z)$, 其线性分量为 $W_L(z)$ 。假设 $W_L(z) = QL \sin(\pi z/L)$, 其中 Q 为位移曲线无量纲幅值。采用弯曲应变与位移简化公式 $\varepsilon = x/R = x(d^2 W/dz^2)$, 其中 R 为弯曲曲率半径。假设应变与位移线性分量满足 $\varepsilon_L = x/R_L = x(d^2 W_L/dz^2)$ 。对理想构件,将应变-位移关系代入式(3)得

$$x \frac{d^2 W}{dz^2} = x \frac{d^2 W_L}{dz^2} + K \left(x \frac{d^2 W_L}{dz^2} \right)^n \quad (5)$$

将 W_L 代入式(5),并求关于 x 的积分平均,基于边界条件 $W(0) = 0$ 及对称条件 $W'(L/2) = 0$, 求关于 z 的不定积分得到

$$W(z) = QL \sin \frac{\pi z}{L} + \frac{\pi^4 b^2 K}{L} Q^3 \left(\frac{1}{16} \sin \frac{\pi z}{L} - \frac{1}{432} \sin \frac{3\pi z}{L} \right) \quad (6)$$

构件截面转角 θ 满足 $\theta = dW/dz$, 引入其线性分量 θ_L , 假设满足 $\theta_L = dW_L/dz$ 。构件整体弯曲导致翼缘及腹板纵向位移为 $u_\theta = -x\theta$, 其线性分量为 $u_{\theta L} = -x\theta_L$, 构件整体屈曲横向位移及截面转角如图4所示。

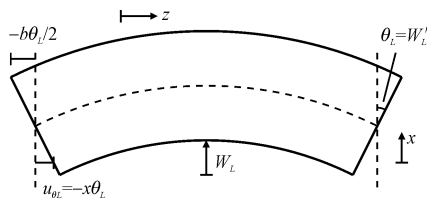


图4 构件整体屈曲横向位移及截面转角
Fig. 4 Lateral displacement and plane section rotation of strut under global buckling

假设构件正常投入使用前形成整体初始缺陷, 但无初始应力, 如图5所示。假设初始横向位移 $W_0 = Q_0 L \sin(\pi z/L)$, 初始截面转角 $\theta_0 = Q_0 \pi \cos(\pi z/L)$ 。对几何缺陷构件, 整体弯曲下翼缘及腹板增量纵向位移为 $u_\theta = -x(\theta - \theta_0)$, 其线性分量为 $u_{\theta L} = -x(\theta_L - \theta_0)$ 。

对局部屈曲模态, 假设受压翼缘平面外位移函数 $w(x, z)$ 表达式为 $f(x)w_L(z)$, 如图6(a)所示, 其中 $f(x)$ 和 $w_L(z)$ 分别代表横向和纵向位移分量。本研究采用如下基于简支梁及悬臂梁挠曲线方程推导的

$f(x)$ 表达式^[29]

$$f(x) = -\frac{1}{s_6} \left[\frac{2x}{b} + s_2 \left(\frac{2x}{b} \right)^2 + s_4 \sin \frac{\pi x}{b} \right] \quad (7)$$

式中, $s_2 = -s_0 \pi b c / 4$, $s_4 = 2s_0 b c / \pi$, $s_0 = 1/(\pi D - b c)$, $s_6 = 1 - s_2 + s_4$ 。 $D = E_0 t^3 / [12(1 - \nu^2)]$, 代表板件初始刚度。当 $c = 0$ 时, $f(x)$ 为线性函数; 当 c 趋于无穷大时, 翼缘与腹板刚接, 如图3(b)所示, $f(x)$ 的表达式为

$$f(x) = -\frac{4\pi}{4\pi - \pi^2 - 8} \left[\frac{2x}{b} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{2x}{b} \right)^2 - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{b} \right] \quad (8)$$

假设受压翼缘平面内纵向位移函数 $u(x, z) = -(2x/b)u_L(z)$, 如图6(b)所示, 忽略翼缘平面内横向位移。分别引入受压翼缘平面外位移线性分量 $w_L(x, z) = f(x)w_L(z)$ 和平面内位移线性分量 $u_L(x, z) = -(2x/b)u_L(z)$ 。

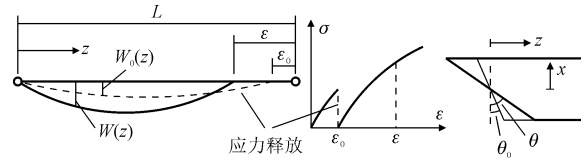


图5 构件整体初始缺陷及应力-应变曲线
Fig. 5 Introduction of geometric imperfections and the corresponding stress-strain curve

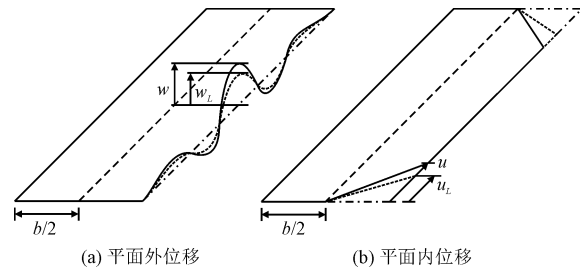


图6 受压翼缘位移函数定义
Fig. 6 Definitions of the displacement functions of compressed flangeplate

2.2 总势能公式推导

构件总势能包括构件整体应变能, 板件局部应变能, 扭转弹簧应变能及外荷载做功。板件局部应变能包括板件弯曲应变能和板件膜应变能。需要说明的是, 构件整体应变能仅考虑腹板弯曲应变, 整体弯曲导致翼缘弯曲应变考虑在膜应变能中。在膜应变能中考虑几何非线性, 采用格林-拉格朗日应变张量。本研究公式推导相对复杂, 因此在科学计算软件 MATHEMATICA 辅助下完成。

2.2.1 构件整体应变能

非线性材料与线性材料应变能密度公式不同。构件整体弯曲下,忽略剪切应变,对式(1)求关于 σ 的微分,将 $d\varepsilon$ 代入应变能密度微分公式 $dU_\rho = \sigma d\varepsilon$ 中,随后求关于 σ 的不定积分^[26]得到

$$U_\rho = \frac{\sigma^2}{2E_0} + \frac{nK}{n+1} \frac{\sigma^{n+1}}{E_0^n} \quad (9)$$

对理想构件,将 $\varepsilon_L = \sigma/E_0$ 代入式(9),得到应变能密度为

$$U_\rho = \frac{1}{2} E_0 \varepsilon_L^2 + \frac{nK}{n+1} E_0 \varepsilon_L^{n+1} \quad (10)$$

对几何缺陷构件,假设初始应变为 ε_0 ,则正常使用过程增量应变为 $(\varepsilon - \varepsilon_0)$,其线性分量满足 $(\varepsilon_L - \varepsilon_0) = \sigma/E_0$,将该式代入式(9),得到应变能密度为

$$U_\rho = \frac{1}{2} E_0 (\varepsilon_L - \varepsilon_0)^2 + \frac{nK}{n+1} E_0 (\varepsilon_L - \varepsilon_0)^{n+1} \quad (11)$$

将整体弯曲应变-位移关系, W_L 及 W_0 代入式(11),并关于腹板体积求定积分,得到构件整体应变能 U_B

$$U_B = E_0 \int_0^L \left[(Q - Q_0)^2 \frac{\pi^4 I_w}{2L^2} \sin^2 \frac{\pi z}{L} + (Q - Q_0)^{n+1} \frac{nK \pi^{2n+2} I_{w,n+1}}{(n+1)L^{n+1}} \sin^{n+1} \frac{\pi z}{L} \right] dz \quad (12)$$

式中: I_w 代表腹板相对弱轴的惯性矩, $I_w = \int x^2 dA$;定义 $I_{w,n+1}$ 为腹板面积的 $n+1$ 次矩, $I_{w,n+1} = \int x^{n+1} dA$, A 代表腹板横截面积。

2.2.2 板件局部应变能

板件局部应变能包括弯曲应变能与膜应变能,首先确定板件局部应变能密度公式。以翼缘为例,采用平面应力假设,由于翼缘为 xz 平面,考虑纵向正应变 ε_z ,横向正应变 ε_x 及剪切应变 γ_{xz} ,同时引入其线性分量 ε_{Lz} , ε_{Lx} 及 γ_{Lxz} 。将一维R-O模型进行拓展得

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E_0} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} + \frac{K}{E_0^n} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n(1+\nu)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^n \\ \sigma_z^n \\ \tau_{xz}^n \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中, ν 为材料泊松比。令应变向量线性分量 $[\varepsilon_{Lx}, \varepsilon_{Lz}, \gamma_{Lxz}]^T$ 等于式(13)右边第一项,以应变向量线性分量-应力向量关系公式改写式(13)右边第二项,类比式(3),可得应变向量与其线性分量关系公式。将一维应变能密度式(9)拓展至三维,可得板件应变能密度公式^[26]。

$$U_\rho = \frac{E_0}{2(1-\nu^2)} \left[\varepsilon_{Lx}^2 + \varepsilon_{Lz}^2 + 2\nu \varepsilon_{Lx} \varepsilon_{Lz} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{Lxz}^2 \right] + \frac{nKE_0}{(n+1)(1-\nu^2)^n} \left[\varepsilon_{Lx} (\varepsilon_{Lx} + \nu \varepsilon_{Lz})^n + \varepsilon_{Lz} (\varepsilon_{Lz} + \nu \varepsilon_{Lx})^n + \frac{(1-\nu^2)^n}{2(1+\nu)} \gamma_{Lxz}^{n+1} \right] \quad (14)$$

1) 板件弯曲应变能

翼缘弯曲应变能采用小变形假设。翼缘弯曲应变-位移满足公式 $\varepsilon_x = -y(\partial^2 w / \partial x^2)$, $\varepsilon_z = -y(\partial^2 w / \partial z^2)$, $\gamma_{xz} = -2y[\partial^2 w / (\partial x \partial z)]$ 。假设应变-位移线性分量保持相似关系。

$$\varepsilon_{Lx} = -y \frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{Lz} = -y \frac{\partial^2 w_L}{\partial z^2}, \quad \gamma_{Lxz} = -2y \frac{\partial^2 w_L}{\partial x \partial z} \quad (15)$$

将式(15)代入式(14),关于受压翼缘体积求定积分,即得翼缘弯曲应变能 U_b

$$U_b = \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_L}{\partial z^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_L}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 w_L}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] \right\} dx dz + \frac{nKD_{n+1}}{n+1} \int_0^L \int_0^b \left[\frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_L}{\partial z^2} \right)^n + \frac{\partial^2 w_L}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 w_L}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} \right)^n + 2^n (1-\nu)^n (1+\nu)^{n-1} \left(\frac{\partial^2 w_L}{\partial x \partial z} \right)^{n+1} \right] dx dz \quad (16)$$

式中: $D = E_0 t^3 / [12(1-\nu^2)]$; $D_{n+1} = E_0 t^{n+2} / [2^{n+1} \cdot (n+2)(1-\nu^2)^n]$ 。

将弯曲应变-位移关系及式(15)代入应变向量与其线性分量关系公式,关于翼缘厚度求积分平均,则得平面外位移 w 与其线性分量 w_L 关系公式。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w_L}{\partial z^2} + \frac{Kt^{n-1}}{2^{n-1}n(1-\nu^2)^n} \left[\left(\frac{\partial^2 w_L}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} \right)^n - \nu \left(\frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_L}{\partial z^2} \right)^n \right] \quad (17)$$

2) 板件膜应变能

构件后屈曲阶段板件位移超出小变形范畴,产

生膜应变能。考虑几何非线性,采用格林-拉格朗日应变张量及冯·卡门大挠度理论。对板件(包括翼缘及腹板)横向正应变,假设仅由泊松效应产生,即 $\varepsilon_{Lx} = -\nu\varepsilon_{Lz}$ 。对板件纵向正应变,引入轴向压应变 $\Delta + K\Delta^3$ 及其线性分量 Δ 。翼缘纵向正应变还包括位移 u_θ 所致应变项。后屈曲阶段仅受压翼缘存在大剪切变形。将板件正应变及切应变代入应变能密度式(14),关于板件体积求定积分,得到膜应变能 $U_m = U_d + U_s$,其中 U_d 代表由正应变产生的膜应变能, U_s 代表由切应变产生的膜应变能。

膜应变能 U_d 计算公式为

$$U_d = E_0 t \int_0^L \left[\int_0^{\frac{b}{2}} \left(\varepsilon_{Lz, t}^2 + \frac{2nK}{n+1} \varepsilon_{Lz, t}^{n+1} \right) dx + \int_{-\frac{b}{2}}^0 \left(\varepsilon_{Lz, c}^2 + \frac{2nK}{n+1} \varepsilon_{Lz, c}^{n+1} \right) dx \right] dz + E_0 t_w h \int_0^L \left(\frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{nK}{n+1} \Delta^{n+1} \right) dz \quad (18)$$

受压及受拉翼缘正应变线性分量-位移公式为

$$\varepsilon_{Lz, c} = \frac{\partial u_{\theta L}}{\partial z} - \Delta + \frac{\partial u_L}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_L}{\partial z} \right)^2, \quad \varepsilon_{Lz, t} = \frac{\partial u_{\theta L}}{\partial z} - \Delta \quad (19)$$

对具有整体初始缺陷的构件, $u_{\theta L} = -x(\theta_L - \theta_0)$ 。膜应变能 U_s 为

$$U_s = G_0 t \int_0^L \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\gamma_{Lxz}^2 + \frac{2nK}{n+1} \gamma_{Lxz}^{n+1} \right) dx \right] dz \quad (20)$$

受压翼缘剪切应变线性分量-位移为

$$\gamma_{Lxz} = \frac{\partial u_L}{\partial x} + \frac{\partial w_L}{\partial z} \frac{\partial w_L}{\partial x} = \left(-\frac{2}{b} \right) u_L + f(x) f'(x) w_L w_L' \quad (21)$$

式(19)和式(21)中, $\varepsilon_{Lz, c}$ 后两项及 γ_{Lxz} 均基于冯·卡门大挠度理论。

2.2.3 扭转弹簧应变能

附加于上下两块受压翼缘的扭转弹簧应变能为

$$U_{sp} = \int_0^L c \left[\frac{\partial w(x, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right]^2 dz = \frac{c}{b^2} \int_0^L \left(\frac{2 + s_4 \pi}{1 - s_2 + s_4} \right)^2 w^2 dz \quad (22)$$

经试算,将式(22)中函数 w 替换为 w_L ,既能降低计算复杂度,亦可兼顾求解精度。此外,扭转弹簧应变能对总势能 V 及模型求解结果影响极小。

2.2.4 外荷载做功

对外荷载所功 PE , 轴向变形项包括构件整体弯曲形成纵向位移,板件局部位移形成纵向位移及轴向压应变形成变形。外荷载做功由以下公式计算。

$$PE = \frac{P}{2bt + ht_w} \int_0^L \left\{ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 2t \left[\frac{\partial u(x, z)}{\partial z} \right] dx + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} t [W'^2 + 2(\Delta + K\Delta^n)] dx + \int_{-t}^t h \left[\frac{1}{2} W'^2 + (\Delta + K\Delta^n) \right] dx \right\} dz \quad (23)$$

式中, $u(x, z)$ 及其线性分量 $u_L(x, z)$ 满足 $\partial u(x, z)/\partial z = \partial u_L(x, z)/\partial z + K[\partial u_L(x, z)/\partial z]^n$ 。计算该公式关于 x 的积分平均得到 $u' = u'_L + K(u'_L)^n/n$ 。 W' 采用式(6)计算。对存在整体几何初始缺陷构件,实际轴向变形为式(23)中 E 减去初始轴向变形 E_0 ,如图5所示。但在后续平衡方程推导过程中,初始轴向变形常数在求导后即被消去,因此式(23)未呈现该项。

构件总势能 V 则由上述应变能组合而成,即

$$V = U_B + U_b + U_d + U_s + U_{sp} - PE \quad (24)$$

2.3 平衡微分方程及边界条件推导

将构件总势能写成如下泛函形式

$$V = \int_0^L \mathcal{L}(w_L'', w_L', w_L, u_L', u_L; z) dz \quad (25)$$

总势能一阶变分 δV 为

$$\delta V = \int_0^L \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_L''} \delta w_L'' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_L'} \delta w_L' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_L} \delta w_L + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_L'} \delta u_L' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_L} \delta u_L \right] dz \quad (26)$$

构件在平衡状态下,总势能 V 必须为平稳函数。

因此以下欧拉-拉格朗日方程组成立

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_L''} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_L'} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_L} = 0, \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_L'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_L} = 0 \quad (27)$$

由式(27)可得变分模型的平衡微分方程组,即关于 w_L 的四阶与关于 u_L 的二阶非线性微分方程。根据构件简支边界条件及对称性得

$$\begin{aligned} w(0) &= w_L(0) = w_L'(0) = u'(0) = u_L'(0) \\ &= w'(L/2) = w_L'(L/2) = w_L''(L/2) \\ &= u(L/2) = u_L(L/2) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

平衡状态下,模型还应满足泛函驻值条件,由此

引出积分边界条件,即 $\partial V/\partial Q=0$ 和 $\partial V/\partial \Delta=0$ 。

根据位移对称性将部分变量无量纲化处理(如 $z=2z/L$, $w_L=2w/L$, $u_L=2u/L$)后,采用软件AUTO^[32]求边界条件下平衡微分方程组数值解。由此得半跨内荷载及位移解,进而基于对称性获得全跨内的解。得到位移线性分量 w_L 和 u_L 及其导数的解后,采用公式(17)等位移-线性分量关系式,可得位移 w 和 u 及其导数的解。

2.4 微分方程数值解计算过程

对理想构件,模型求解包括3阶段(解的延拓)及2个分岔点,如图7(a)所示。外荷载 P 逐渐增大到临界荷载 P_c (阶段1)并触发整体屈曲(第1分岔点 C),在 C 点执行解的分岔后,整体横向位移 Q 逐渐发展(阶段2),直到触发局部屈曲并与整体屈曲

耦合(第2分岔点 S),在 S 点执行解的分岔,进入相关屈曲后阶段(阶段3),构件承载力快速下降。

对几何初始缺陷构件,模型求解过程包括2阶段(解的延拓)及1个分岔点,如图7(b)所示。外荷载 P 从0开始增大(阶段1),整体横向位移 Q 从初始缺陷幅值 Q_0 开始增加,直到触发局部屈曲并与整体模态耦合(第1分岔点 S_0),在 S_0 点实施解的分岔,进入相关屈曲后阶段(阶段2),构件承载力小幅增加达到极限承载力 P_u 后快速回落。

基于以上计算过程及结果数据,即可确定在相关屈曲前、相关屈曲临界点及相关屈曲后各阶段中构件承载力随位移变化的情况。同时,还可采用延拓计算确定任一特定位移下构件的承载力。此外,可通过减小计算步长获得足够的计算精度。

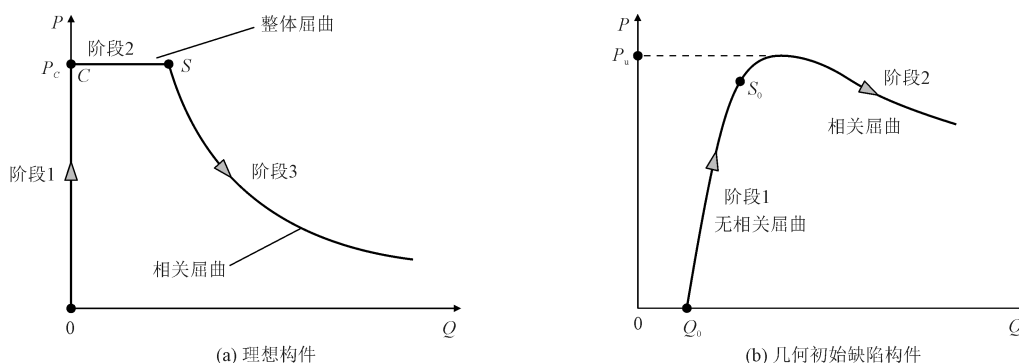


图7 平衡路径数值求解过程

Fig. 7 Numerical continuation procedures for computing the equilibrium paths

3 模型算例

本研究算例研究了:非线性材料力学性能对理想构件相关屈曲的影响;整体初始缺陷对相关屈曲的影响。各算例中材料硬化系数 $n=3$,相应材料强度偏于实际值下界^[33]。

3.1 理想构件算例

薄壁I形截面理想构件编号I-L3200,几何与材性参数如表1所示。假设扭转弹簧刚度 c 无穷大,采用式(8)计算受压翼缘平面外位移。构件整体屈曲临界荷载 $P_c \approx P_E$ 即欧拉荷载, $P_E = \pi^2 E_0 I/L^2$ 。板件局部屈曲临界应力通过公式 $\sigma = \pi^2 k D/b^2 t$ 计算,其中 b 为板件宽度, t 为板件厚度, D 为板件抗弯刚度, k 取值与板件边界条件有关。对腹板(四边约束) $k=4$;对翼缘(三边约束一边自由) $k=1.247$ 。

经计算,构件整体、翼缘局部、腹板局部屈曲临界应力分别为93.24、116.88、303.68 N/mm²。因此整体屈曲先发生,前文腹板不发生屈曲假设合理性得到验证。

不同材料名义屈服强度(即参数 K ,如表2所示)下,模型荷载-位移曲线求解结果如图8所示,其中 $p=P/P_E$ 代表无量纲化外荷载。

表1 构件算例几何参数与材性参数

Tab. 1 Cross-section and material properties of example struts

参数名称	I-L3200	I-L4000
压杆长度 L/mm	3 200	4 000
翼缘宽度 b/mm	108	96
腹板高度 h/mm	120	120
翼缘厚度 t/mm	1.2	1.2
初始杨氏模量 $E_0/(\text{kN} \cdot \text{mm}^{-2})$	210	210
泊松比 ν	0.3	0.3
Ramberg-Osgood 参数 n	3	3

对外荷载-整体横向位移曲线,如图 8(a)所示,构件在 C 点处发生整体屈曲,达到其极限承载力,随后在 C 与 S 点之间,当 $K=0$ 时,构件保持中性平衡,而当 $K>0$ 时,则为弱稳定平衡。 S 点为构件发生相关屈曲的临界点,随后构件进入相关屈曲后阶段,承载力快速下降。当 $0.8 < p < 1.0$ 时,由于非线性高次项 $K(\varepsilon_L)^n$ 在应变 ε 中占比较低,横向位移 W 及其线性分量 W_L 曲线几乎重合。随着位移增大,非线性项 $K(\varepsilon_L)^n$ 的影响逐渐显著,导致相同参数 K 下 W 及 W_L 曲线逐渐分化。相同位移水平下,构件承载力随着非线性材料名义屈服强度的降低(参数 K 增

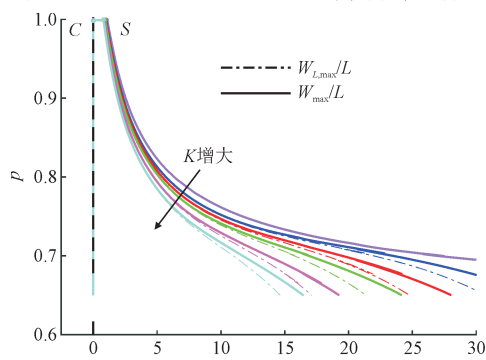
大)而下降,相关屈曲后性能也下降。

表 2 参数 K 取值

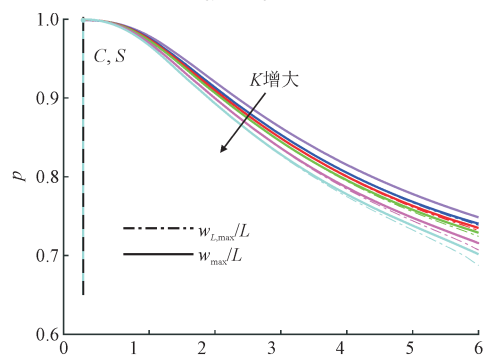
Tab. 2 Chosen values of parameter K

工况	K	$\sigma_{0.2}/\text{MPa}$
1	0	—
2	2×10^4	974.73
3	3×10^4	851.51
4	4×10^4	773.65
5	6×10^4	675.84
6	8×10^4	614.04

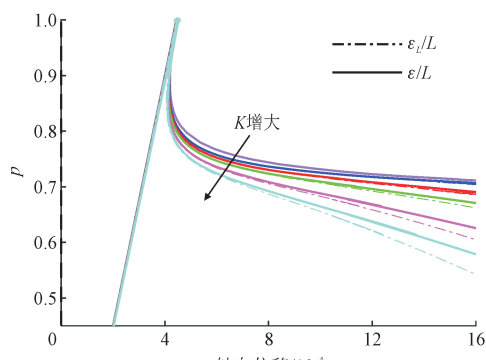
注:材料名义屈服强度 $\sigma_{0.2} = E_0 (0.002/K)^{1/3}$ 。



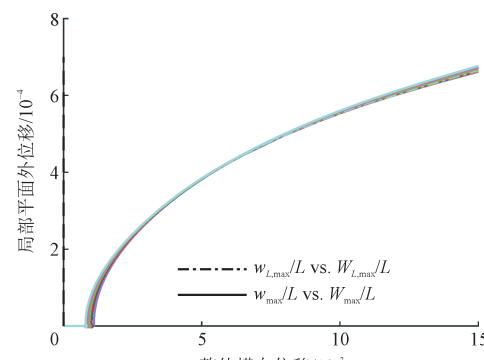
(a) 荷载-整体横向位移



(b) 荷载-局部平面外位移



(c) 荷载-轴向位移



(d) 局部平面外位移-整体横向位移

图 8 变分模型平衡路径求解结果

Fig. 8 Equilibrium paths obtained from the variational model

对外荷载-局部面外位移及外荷载-轴向位移曲线,构件后屈曲性能同样与材料名义屈服强度正相关,如图 8(b)和图 8(c)所示。相同荷载水平下,材料非线性使实际位移大于其线性分量,如图 8(a)~图 8(c)所示。此外,整体位移 W 与局部位移 w 关系受材料名义屈服强度影响较小,如图 8(d)所示。

不同参数 K 及承载力水平下,翼缘局部屈曲模式的发展如图 9 所示。结果表明,在相关屈曲后阶段,随着构件承载力的下降,平面外位移 w 幅值逐渐增大,局部屈曲波长不断减小,屈曲波形由构件中部

向两端扩散发展。在相同承载力水平下,平面外位移 w 幅值随材料名义屈服强度的下降而减小。

当 $p=0.65$ 时,构件中最大正应变-正应力如图 10 中标记点所示,名义屈服强度 $\sigma_{0.2}$ 及应变 $\varepsilon_{0.2}$ 如图 10 中虚线所示。即便相关屈曲后变形充分发展,承载力相较临界荷载大幅下降 35%,最大正应力仍远小于名义屈服强度,说明构件中塑性应变极小。因此,在本研究相关屈曲讨论范围内,对细长构件采用原始 R-O 模型而非实际工程中常用双阶段 R-O 模型,产生误差可忽略不计。

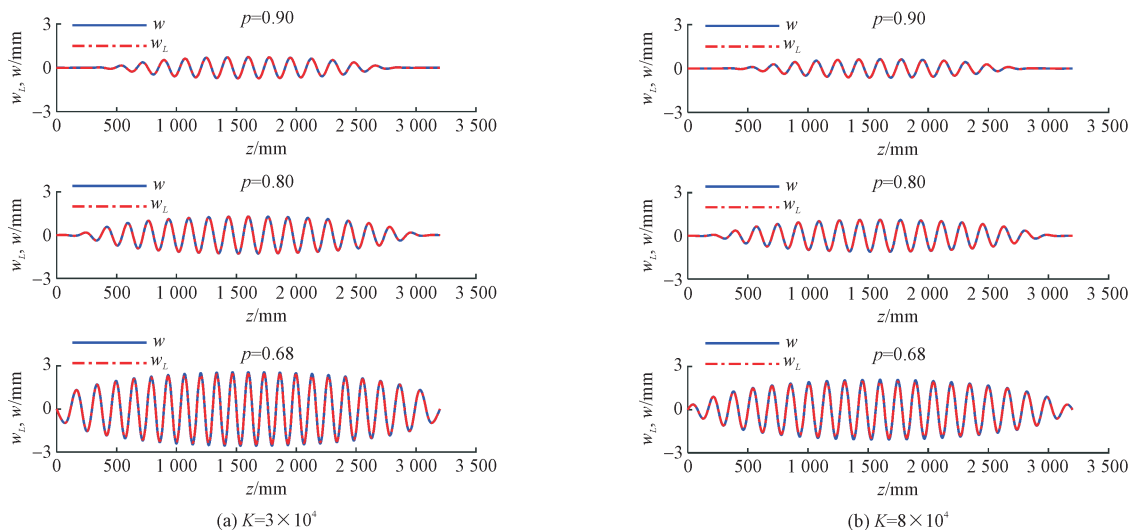
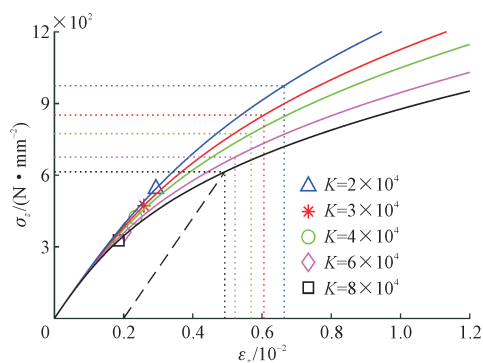


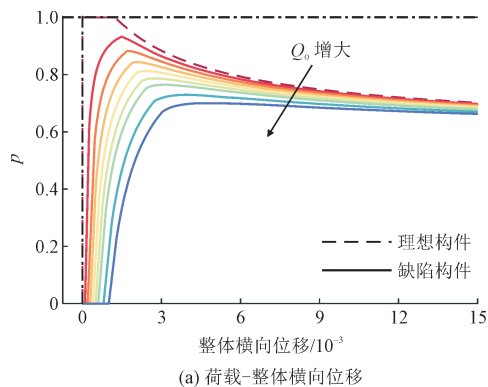
图9 局部平面外位移函数求解结果

Fig. 9 Numerical solutions for the flange out-of-plane displacement functions

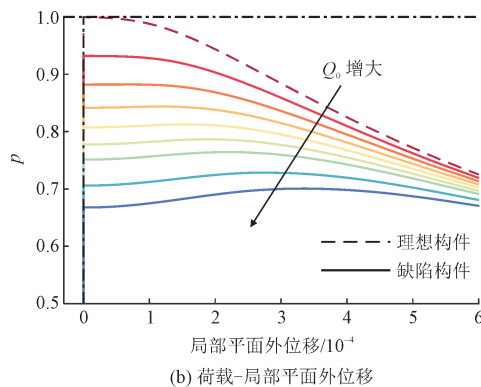
图10 不同名义屈服强度 $\sigma_{0.2}$ 下 R-O 模型曲线Fig. 10 Ramberg-Osgood curves for different cases of $\sigma_{0.2}$

3.2 整体初始缺陷构件算例

考虑整体初始缺陷构件编号 I-L4000, 相关参数如表1所示。定义无量纲化极限承载力 $p_u = P_u/P_E$ 。当 $K = 1 \times 10^4$ 且 $c = 100 \text{ Nm/m}$ 时, 不同整体初始缺



(a) 荷载-整体横向位移



(b) 荷载-局部平面外位移

陷幅值 Q_0 下构件极限承载力及荷载-位移曲线如表3和图11所示。

存在整体初始缺陷的构件受到外荷载作用时, 构件首先发生整体弯曲模态。随着外荷载的增加, 翼缘中的应力增大, 同时变形不断发展, 直至发生局部屈曲, 并与整体模态相互耦合, 随后构件达到极限承载力并发生失稳, 承载力持续下降。外荷载达到极限承载力之前, 各荷载-位移曲线间的分化程度随荷载的增加而增大; 而在构件承载力下降阶段, 各荷载-位移曲线间的距离随位移的增大而减小, 构件承载力相对于极限承载力的下降幅度随整体初始缺陷幅值的增大而减小, 如图11(a)~图11(c)所示。

由表3及图11(d)可知, 构件极限承载力与整体初始缺陷幅值成反比, 且后者对前者的影响较为明显, 因此工程实践中整体初始缺陷因素不容忽视。

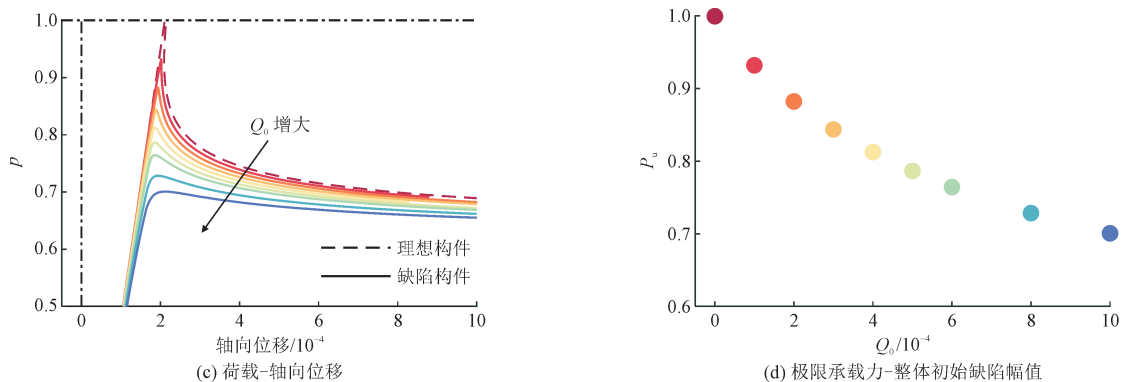


图 11 不同整体初始缺陷下平衡路径求解结果

Fig. 11 Equilibrium paths obtained from the variational model

表 3 不同整体初始缺陷幅值及相应极限荷载

Tab. 3 Different values of initial global imperfection and the corresponding peak loads

参数	工况								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Q_0/10^{-4}$	0	1	2	3	4	5	6	8	10
P_u	1	0.93	0.88	0.84	0.81	0.79	0.76	0.73	0.70
相对降幅/%	0	6.8	11.8	15.6	18.7	21.3	23.6	27.2	29.9

4 模型验证

本研究采用变分模型对 Becque 薄壁 I 形截面受压构件相关稳定试验^[30]进行了模拟,将变分模型结果与 Becque 试验结果及 Becque 有限元模拟结果^[30]进行比较。试验构件由两根冷成型 404 不锈钢 C 形截面构件经紧固件拼接形成。构件编号及相应参数如表 4 所示。首先确定材料力学性能、翼缘与腹板连接刚度、构件整体初始缺陷,使模型参数与试验条件一致,随后计算构件模型的荷载-位移曲线。

4.1 模型参数确定

对变分模型材料力学性能,通过拟合试验构件平板区材料压缩试验应力-应变曲线确定。由于已知相关屈曲后阶段细长构件中最大正应变远小于 $\sigma_{0.2}$ 对应的总应变,本研究采用 $0 < \varepsilon < 0.2\%$ 范围内对试验数据拟合效果最好的 R-O 公式,其中 $K = 1.5 \times 10^5$,如图 12 所示。对翼缘与腹板的连接刚度,将表 4 中的转角区参数代入式(4)中计算得 $c \approx 5\,500 \text{ Nm/m}$ 。对试验构件 I404-L3000 与 I404-L2500 的整体初始缺陷,由试验测定的数据可得,考虑构件跨中测点的横向偏移量后,试验外荷载 P 相对跨中及端部截面的平均初始偏心距 e_0 分别为 $L_e/1912$ 与

$L_e/1\,645$ 。因此变分模型整体初始缺陷无量纲化幅值 Q_0 应为 5.2×10^{-4} 与 6.1×10^{-4} 。

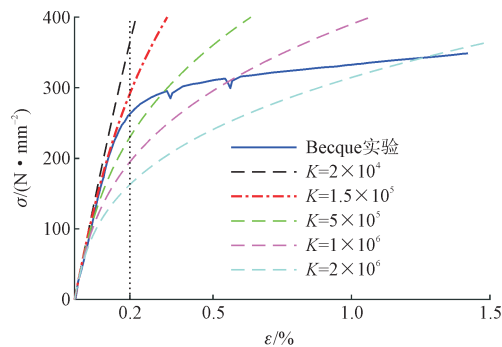


图 12 原始 R-O 模型对试验数据拟合

Fig. 12 Simulation of experimental curve by original Ramberg-Osgood model

表 4 试验构件有关参数

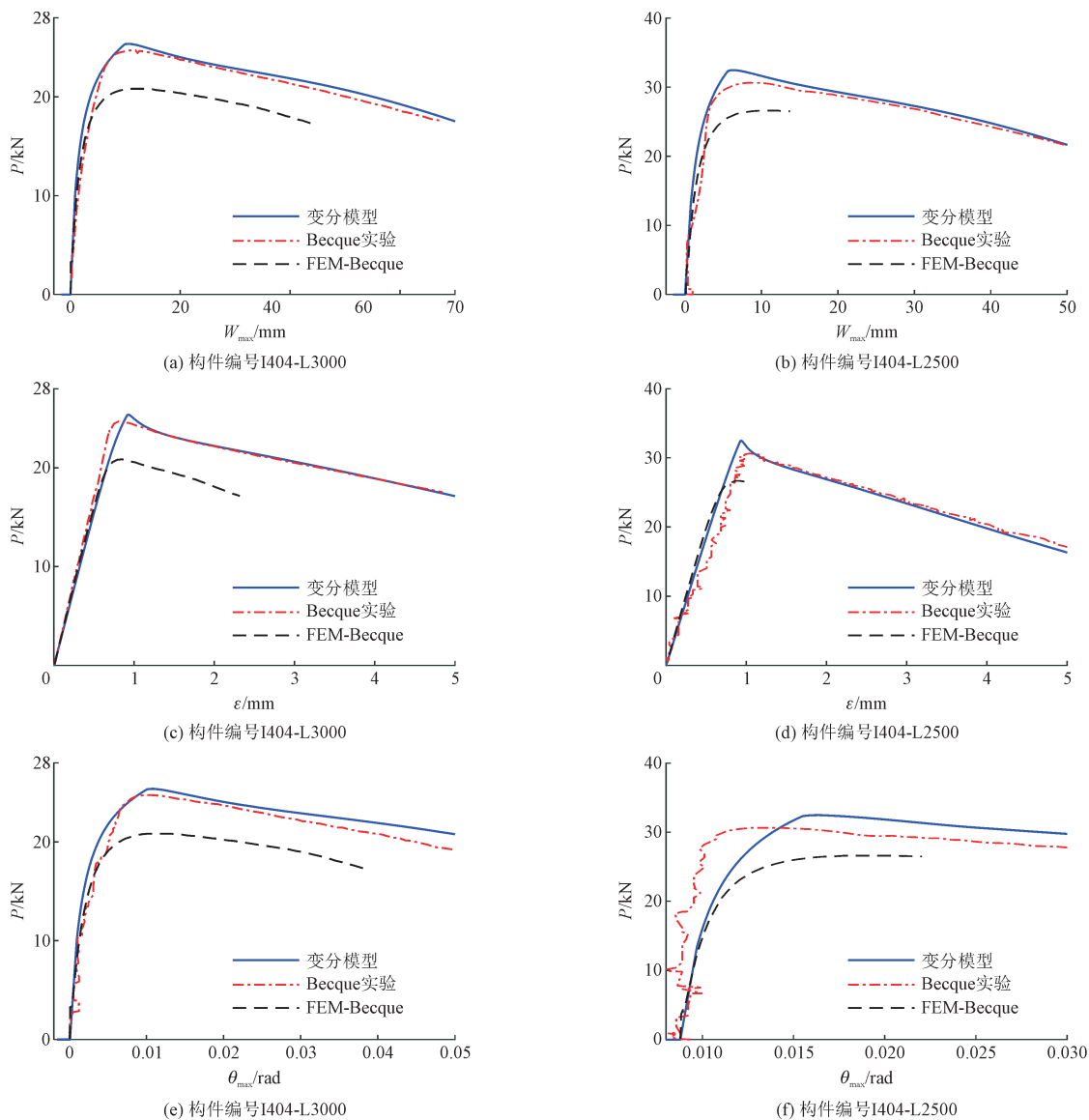
Tab. 4 Properties for the tested struts

参数名称	I404-L3000	I404-L2500
构件长度 L/mm	2 999	2 497
有效长度 L_e/mm	3 117	2 615
翼缘宽度 b/mm	96.64	96.80
转角区半径 r/mm	3.06	3.02
翼缘厚度 t/mm	1.21	1.21
截面高度 h/mm	125.12	125.12
平板区初始弹性模量/($\text{kN} \cdot \text{mm}^{-2}$)	195	195
转角区初始弹性模量/($\text{kN} \cdot \text{mm}^{-2}$)	179	179

4.2 模型结果与试验对比

对两种长度构件,变分模型与试验构件的横向位移、轴向位移相关屈曲全过程荷载-位移曲线均保持高度吻合,如图13所示。相对有限元模拟,变分模型与试验结果相关性更好,对构件相关屈曲后位

移及承载力发展过程的分析也更完整。特别是承载力下降的相关屈曲后阶段,构件同时产生大变形,材料非线性对失稳曲线的影响显著,本研究模型通过引入非线性项 $K(\varepsilon_L)$ 模拟该因素,因此模型与试验结果曲线一致性高。



注:FEM-Becque 为 Becque 有限元结果^[30]。

图13 构件变分模型结果与试验结果对比

Fig. 13 Numerical equilibrium paths compared with experiments

对构件 I404-L3000,试验极限荷载约 24.71 kN,变分模型极限荷载约 25.36 kN,模型相对试验误差约 2.6%。当构件整体横向位移为 40 mm 时,试验构件与本模型构件均已发生整体-局部相关屈曲,并处于承载力快速下降的失稳阶段,变分模型构件承载力相对试验结果的误差仅 2.7%,远小于有限元模拟相应误差 16.1%。当构件轴向位移约 2 mm

时,有限元模拟外部荷载误差高达 18.7%,而变分模型与试验数据高度一致。

对构件 I404-L2500,试验极限荷载约 30.63 kN,而变分模型相应值为 32.46 kN,相对误差约 6.0%。当构件整体横向位移为 10 mm 时,变分模型构件承载力相对试验结果的误差为 3.5%,而有限元误差达到 13.0%。变分模型与试验截面转角-外荷载后

屈曲平衡路径保持平行,但相对误差大于构件横向及轴向位移平衡路径。综上,变分模型有效性得到充分验证。

对本模型与试验值间的误差产生原因作如下探讨:加载过程中,截面转角区材料切线模量改变,扭转弹簧实际刚度偏离基于初始弹性模量的计算值;试验构件存在板件局部初始缺陷,而本研究未考虑该因素;变分模型未考虑整体屈曲下剪切应变,增加了截面转角误差。

需要说明的是,图13中有限元与试验曲线数据均来自文献[30],两者之间误差较大的主要原因是该有限元模型仅引入了荷载初始偏心距,而未考虑构件的初始几何缺陷。

5 结 论

1) 基于 Rayleigh-Ritz 法,对薄壁 I 形截面细长构件建立了相关屈曲变分模型,考虑了构件整体初始缺陷,非线性材料 R-O 模型,冯·卡门大挠度理论,并采用扭转弹簧模拟了翼缘与腹板的连接刚度。结果表明:对理想构件,相同位移下的相关屈曲后承载力与材料名义屈服强度正相关;板件局部屈曲波长随屈曲后承载力的下降而减小。构件极限承载力对整体初始缺陷较敏感,整体初始缺陷幅值达 $L/1\ 000$ 时,极限承载力下降约 30%。

2) 本研究变分模型填补了薄壁 I 形截面构件同时考虑几何非线性和材料非线性的相关屈曲解析研究的空白。本方法同样适用于其他组成板件为平板的截面形式下薄壁细长构件的相关稳定问题,如 T 形、C 形及 H 形截面等,但需根据具体截面形式推导总势能泛函。与有限元法相比,变分模型便于参数化分析,仅需在程序脚本中修改参数值。本方法不足之处在于,对于组成板件较多的复杂截面形式,建立简洁精确的理论变分模型比较困难,此时采用有限元法更为合适。

3) 变分模型模拟结果与既有试验结果吻合良好。模型和试验的极限承载力差异控制在 6% 以内。在相关屈曲后阶段,相同横向位移或轴向位移水平下,模型和试验的承载力百分比差异更低。

4) 构件后屈曲承载力大幅下降后,最大正应力及正应变仍远小于 $\sigma_{0.2}$ 及 $\varepsilon_{0.2}$,因此,采用原始 R-O 模型而非双阶段模型分析细长构件相关屈曲的有效性得到验证。本研究模型适用于设计荷载受整体屈

曲临界荷载控制的细长构件相关稳定问题,而不适用于短柱,对整体屈曲临界应力接近名义屈服强度的短柱,需采用双阶段 R-O 模型。

参考文献:

- [1] HANCOCK G J. Local, distortional, and lateral buckling of I-beams [J]. Journal of the structural division, 1978, 104(11): 1787-1798.
- [2] SCHAFER B W. Local, distortional, and Euler buckling of thin-walled columns [J]. Journal of structural engineering, 2002, 128(3): 289-299.
- [3] HANCOCK G J. Cold-formed steel structures: research review 2013—2014 [J]. Advances in structural engineering, 2016, 19(3): 393-408.
- [4] CAMOTIM D, MARTINS A D, DINIS P B, et al. Mode interaction in cold-formed steel members: state-of-art report [J]. Steel construction, 2020, 13(3): 186-207.
- [5] BAI L, WANG F, WADEE M A, et al. Nonlinear mode interaction in equal-leg angle struts susceptible to cellular buckling [J]. Proceedings of the Royal Society a: mathematical, physical and engineering sciences, 2017, 473(2207): 20170583.
- [6] 陈绍蕃. 钢结构稳定设计的新进展 [J]. 建筑钢结构进展, 2004, 6(2): 1-13.
CHEN Shaobo. Recent progress in structural steel stability design [J]. Progress in steel building structures, 2004, 6(2): 1-13 (in Chinese).
- [7] 胡治中. 开孔高强冷弯薄壁型钢柱局部--畸变相关屈曲力学性能研究 [D]. 淮南: 安徽理工大学, 2021.
- [8] 李晨旭. 卷边 C 形截面不锈钢柱局部与畸变相关屈曲研究 [D]. 南京: 东南大学, 2021.
- [9] 任重, 刘秋婷, 王斌华, 等. 开孔冷弯薄壁 C 型钢压弯构件的数值分析和设计方法 [J]. 上海交通大学学报, 2020, 54(10): 1084-1093.
REN Chong, LIU Qiuting, WANG Binhua, et al. Numerical analysis and design method of cold-formed thin-walled C-section steel perforated member [J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2020, 54(10): 1084-1093 (in Chinese).
- [10] SHEN J J, WADEE M A. Length effects on interactive buckling in thin-walled rectangular hollow section struts [J]. Thin-walled structures, 2018, 128: 152-170.
- [11] 申红侠. 高强度钢焊接薄壁箱形截面双向压弯构件的稳定承载力 [J]. 建筑钢结构进展, 2020, 22(4): 57-67.
SHEN Hongxia. The stability of high-strength steel welded thin-walled box beam-columns under biaxial bending [J]. Progress in steel building structures, 2020, 22(4): 57-67 (in Chinese).
- [12] ZHANG L L, LIANG Y T, ZHAO O. Flexural-torsional buckling behaviour and resistances of fixed-ended press-braked S690 high strength steel angle section columns [J]. Engineering structures, 2020, 223: 111180.
- [13] BAI L, YANG J, WADEE M A. Cellular buckling from nonlinear mode interaction in unequal-leg angle struts [J]. Thin-walled struc-

- tures, 2018, 132: 316-331.
- [14] 姚行友, 李潇. 冷弯薄壁型钢拼合工字形截面柱畸变屈曲及相关屈曲轴压性能试验与直接强度法研究[J]. 建筑钢结构进展, 2021, 23(12): 33-46.
- YAO Xingyou, LI Xiao. Tests and direct strength method on the distortional buckling and interactive buckling of cold-formed thin-walled steel built-up I-section columns under axial compression[J]. Progress in steel building structures, 2021, 23(12): 33-46 (in Chinese).
- [15] BAI L, WADEE M A. Slenderness effects in thin-walled I-section struts susceptible to local-global mode interaction[J]. Engineering structures, 2016, 124: 128-141.
- [16] TETER A, KOLAKOWSKI Z. Interactive buckling of wide plates made of functionally graded materials with rectangular stiffeners[J]. Thin-walled structures, 2022, 171: 108750.
- [17] WADEE M A, FARSI M. Cellular buckling in stiffened plates[J]. Proceedings of the Royal Society a: mathematical, physical and engineering sciences, 2014, 470(2168): 20140094.
- [18] GARDNER L, NETHERCOT D A. Experiments on stainless steel hollow sections—part 1: material and cross-sectional behaviour[J]. Journal of constructional steel research, 2004, 60(9): 1291-1318.
- [19] GEORGANTZIA E, GKANTOU M, KAMARIS G S. Aluminium alloys as structural material: a review of research[J]. Engineering structures, 2021, 227: 111372.
- [20] 王元清, 袁煥鑫, 石永久, 等. 不锈钢结构的应用和研究现状[J]. 钢结构, 2010, 25(2): 1-12.
- WANG Yuanqing, YUAN Huanxin, SHI Yongjiu, et al. A review of current applications and research of stainless steel structure[J]. Steel construction, 2010, 25(2): 1-12 (in Chinese).
- [21] ZHAO J H, FAN S G, LI C X, et al. Research on the local-distortional interaction buckling capacity of stainless steel lipped C-section columns[J]. Structures, 2023, 48: 2003-2023.
- [22] ROY K, HO LAU H, AHMED A M M, et al. Nonlinear behavior of cold-formed stainless steel built-up box sections under axial compression[J]. Structures, 2021, 30: 390-408.
- [23] KOUNADIS A N, MALLIS J G. Elastica type buckling analysis of bars from non-linearly elastic material[J]. International journal of non-linear mechanics, 1987, 22(2): 99-107.
- [24] SAETIEW W, CHUCHEEPSAKUL S. Post-buckling of linearly tapered column made of nonlinear elastic materials obeying the generalized Ludwick constitutive law[J]. International journal of mechanical sciences, 2012, 65(1): 83-96.
- [25] RAMBERG W, OSGOOD W R. Description of stress-strain curves by three parameters[EB/OL]. (1943-07-01) [2022-09-12]. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930081614>.
- [26] BAI L, WADEE M A, KÖLLNER A, et al. Variational modelling of local-global mode interaction in long rectangular hollow section struts with ramberg-osgood type material nonlinearity[J]. International journal of mechanical sciences, 2021, 209: 106691.
- [27] WADEE M A, BAI L. Cellular buckling in I-section struts[J]. Thin-walled structures, 2014, 81: 89-100.
- [28] BAI L, WADEE M A. Imperfection sensitivity of thin-walled I-section struts susceptible to cellular buckling[J]. International journal of mechanical sciences, 2015, 104: 162-173.
- [29] BAI L, WADEE M A. Mode interaction in thin-walled I-section struts with semi-rigid flange-web joints[J]. International journal of non-linear mechanics, 2015, 69: 71-83.
- [30] BECQUE J. The interaction of local and overall buckling of cold-formed stainless steel columns[D]. Sydney: University of Sydney, 2008.
- [31] HILL H N. Determination of stress-strain relations from “offset” yield strength values[EB/OL]. (1944-02-01) [2022-09-14]. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930081673>.
- [32] DOEDEL E, CHAMPNEYS A, DERCOLE F, et al. Auto: software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations[EB/OL]. (2019-11-30) [2022-11-24]. <http://indy.cs.concordia.ca/auto/>.
- [33] KAMAYA M. Ramberg-Osgood type stress-strain curve estimation using yield and ultimate strengths for failure assessments[J]. International journal of pressure vessels and piping, 2016, 137: 1-12.

(编辑 张璐)