一类椭圆型方程解的 Hölder 连续性

潘 婷， 吕月明， 杨健博
（哈尔滨理工大学 理学院，哈尔滨 150080）

摘 要：为了研究一类椭圆型方程解的 Hölder 连续性，利用 Poincaré 不等式、Sobolev 不等式及 John-Nirenberg 定理，根据 Moser 迭代方法，得到了 Harnack 不等式，并给出了椭圆型方程的解的局部 Hölder 连续性。

关键词：椭圆型方程；正则性；Moser 迭代方法；Harnack 不等式；局部 Hölder 连续性
DOI：10.15938/j.jhust.2026.03.012
中图分类号：O175.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1007-2683(2026)03-0120-07

Hölder Continuity of Solutions to a Class of Elliptic Equations

PAN Ting， LÜ Yueming， YANG Jianbo
（School of Science， Harbin University of Science and Technology， Harbin 150080， China）

Abstract：In order to study the Hölder continuity of solutions to a class of elliptic equations， this paper employs the Poincaré inequality， Sobolev inequality， and the John-Nirenberg theorem. By applying the Moser iteration method， the Harnack inequality is obtained， and the local H? lder continuity of solutions to the elliptic equations is established.

Keywords：elliptic equation； regularity； Moser iterative method； Harnack inequality； local Hölder continuity

0 引 言

A-调和方程作为非线性椭圆型方程的重要分支，在物理学、生物学等领域有着广泛的应用，例如可以通过 A-调和方程来描述热力学、流体力学、电磁学等问题。因此，A-调和方程解的正则性的研究对解决实际问题具有重要意义。

上世纪 MOSER[1] 简化了有界可测系数的散度型椭圆方程解的 Hölder 模估计的证明。SERRIN[2] 对一般散度型椭圆方程正解的 Harnack 不等式进行了研究，并给出了相应的 Hölder 连续性。近些年，许多学者针对不同结构条件的 A-调和类型方程进行了深入研究[3-10]。文[11]中证明了椭圆方程在自然增长条件下的有界弱解的局部 Hölder 连续性。文[12]中研究了一类非齐次 A-调和方程非负解的 Caccioppoli 估计，并依据 Moser 迭代等方法，得到方程的非负解的弱逆 Hölder 不等式。文[13]中推广了文[2]的结果，得到了系数属于 $L\log L^{\frac{n-1}{r}}(D)$ 的一般拟线性方程的 Harnack 不等式及解的 Hölder 连续性。文[14]中研究了一类 A-调和方程在系数满足 BMO 条件下弱解的内部梯度估计。GIANNETTI 等[15]研究了一类椭圆型方程弱解的高阶可积性。随着微分几何与偏微分方程的交叉融合，文[16-17]提出了微分形式的 A-调和方程，并给出了方程解的基本不等式。吕月明等[18]研究了一类微分形式 A-调和方程的算子范数估计。DAI[19] 给出了一

收稿日期：2024-07-20
基金项目：国家自然科学基金(11901140)；黑龙江省自然科学基金(A2018009)；黑龙江省普通本科高等学校青年创新人才培养项目(UNPYSCT-2018206).
作者简介：潘 婷(1999—)，女，硕士研究生；
杨健博(1999—)，男，硕士研究生.
通信作者：吕月明(1984—)，女，博士，副教授，E-mail：yueminglu@hrbust.edu.cn.

类特殊微分形式 A – 调和方程的 Caccioppoli 不等式和高阶可积性。由此可见,目前对于各类 A – 调和方程的研究已经获得了丰富的成果,但关于 A – 调和类型方程的正则性的研究还不够完善。

本文主要研究了基于欧氏空间中的一类非齐次 A – 调和方程解的性质,过去对这类方程的研究主要体现在解的存在唯一性及高阶可积性,见文[8]。然而,关于此类方程解的 Hölder 连续性的研究仍比较匮乏。本文首先利用 Moser 迭代方法,得到了方程正解的 Harnack 不等式,为此类方程解的性质的研究提供了强有力的工具。在此基础上,给出了不同结构条件下的解的局部 Hölder 连续性,对此类方程正则性理论的研究有着重要意义,有效促进了 A – 调和理论的进一步发展。

1　预备知识

本文假设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集,$B = B(R)$ 为 Ω 中以 R 为半径的开球,且 $3B \subset \Omega$。$|\Omega|$ 为 Ω 的 Lebesgue 测度,$W_{1,p}(\Omega) = \{u \mid u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega)\}$,$W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{u \mid u \in W^{1,p}(\Omega'), \forall \Omega' \subset\subset \Omega\}$,$W^{1,p}_0(\Omega)$ 为 $C^\infty_0(\Omega)$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的闭包。

考虑方程

$$\mathrm{div}A(x,u,\nabla u) = B(x,u) \tag{1}$$

算子 $A: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,算子 $B: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,其中算子 A 关于 x 可测,关于 u 连续,并且满足:

$$\begin{aligned} &\langle A(x,u,\nabla u), \nabla u\rangle \geqslant C_1 |\nabla u|^p - C_2 |u|^p \\ &|A(x,u,\nabla u)| \leqslant C_3 |\nabla u|^{p-1} + C_4 |u|^{p-1} \\ &|B(x,u)| \leqslant C_5 |u|^{p-1} \end{aligned} \tag{2}$$

定义 1[3]　若 $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,使得对任意非负的 $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$,有

$$\int_\Omega A(x,u,\nabla u)\nabla\varphi \mathrm{d}x + \int_\Omega B(x,u)\varphi \mathrm{d}x = 0$$

成立,则称 u 为方程(1) 的弱解。

引理 1[2]　若 p 为 1 个常指数,a_i、b_i($i = 1,\cdots,N$),满足 $0 < a_i < \infty$、$0 \leqslant b_i < p$,假设 z 为 1 个正常数,且 $z^p \leqslant \sum\limits_{i=1}^N a_i z^{b_i}$,则有

$$z \leqslant c\sum_{i=1}^N (a_i)^{\gamma_i}$$

其中 $C = C(N,p,b_i)$,且 $\gamma_i = \dfrac{1}{p - b_i}$。

引理 2[6]　(局部 Poincaré 不等式) 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$,则存在常数 $c = c(n,p,R)$,对于 $u \in W^{1,p}(\Omega)$,使得

$$\|u - u_B\|_{p,B} \leqslant c \|\nabla u\|_{p,B}$$

其中 $u_B = \dfrac{1}{|B|}\int_B u\mathrm{d}x$。

引理 3[7]　(Sobolev 不等式) 若 $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$,则存在 $\chi = \dfrac{n}{n-p} > 1$、$c = c(n,p,R) > 0$,使得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |u|^{\chi p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\chi p}} \leqslant c\left(\frac{1}{|B|}\int_B |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

成立。

引理 4[20]　(John-Nirenberg 定理) 设 v 为 Ω 中局部可积函数,且

$$\sup \frac{1}{|B|}\int_B |v - v_B| \mathrm{d}x \leqslant c_0$$

其中 $v_B = \dfrac{1}{|B|}\int_B v\mathrm{d}x$,则存在只依赖于 c_0、n 的常数 c_1、c_2,使得

$$\sup \frac{1}{|B|}\int_B \mathrm{e}^{c_1|v-v_B|}\mathrm{d}x \leqslant c_2$$

成立。

引理 5[2]　设 $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为方程(1) 的弱解,$B \subset \Omega$,且 $3B \subset \Omega$,若 $p < n$,且满足条件(2),则有

$$\|u\|_{\infty,B} \leqslant CR^{-\frac{n}{p}} \|u\|_{p,3B}$$

其中 $C = C(n,p)$。

注 1　如果 $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为方程(1) 在 Ω 中的非负解,则令 $\bar{u} = u + R$,由引理 5 易知方程(1) 的每个解在 Ω 中都是局部有界的,则有如下的结构条件:

$$\begin{aligned} &\langle A(x,u,\nabla u), \nabla u\rangle \geqslant C_1 |\nabla u|^p - \bar{C}_2 |\bar{u}|^p \\ &|A(x,u,\nabla u)| \leqslant C_3 |\nabla u|^{p-1} + \bar{C}_4 |\bar{u}|^{p-1} \\ &|B(x,u)| \leqslant \bar{C}_5 |\bar{u}|^{p-1} \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\bar{C}_2$、$\bar{C}_4$、$\bar{C}_5$ 为与 C_2、C_4、C_5 有关的常数。

为了利用 John-Nirenberg 定理,首先给出下面的引理:

引理 6　设 $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为方程(1) 在 Ω 中的解,$B \subset \Omega$,且 $3B \subset \Omega$,则存在 $c = c(p) > 0$,使得

$$\int_{B_1} | v - v_{B_1} | \mathrm{d}x \leqslant c | B_1 |$$

其中 $v = \log\bar{u}, \bar{u} = u + R, B_1 \subset 2B$。

证明:取 $\eta \in C_0^\infty(B)$,且 $\eta \geqslant 0$,令 $\varphi = \eta^p \bar{u}^{1-p}$,则 $\nabla\varphi = (1-p)\bar{u}^{-p}\eta^p \nabla\bar{u} + p\eta^{p-1}\bar{u}^{1-p}\nabla\eta$,因为 u 为方程(1)的解,则由定义1及结构条件(3)得

$$0 = \int_{3B} A(x,u,\nabla u)\nabla\varphi \mathrm{d}x + \int_{3B} B(x,u)\varphi \mathrm{d}x =$$

$$\int_{3B} A(x,u,\nabla u)(1-p)\bar{u}^{-p}\eta^p \nabla\bar{u}\mathrm{d}x +$$

$$\int_{3B} A(x,u,\nabla u)p\eta^{p-1}\bar{u}^{1-p}\nabla\eta \mathrm{d}x +$$

$$\int_{3B} B(x,u)\eta^p \bar{u}^{1-p}\mathrm{d}x \leqslant -$$

$$(1-p)C_1\int_{3B} | \nabla u |^p \bar{u}^{-p}\eta^p \mathrm{d}x +$$

$$(1-p)\bar{C}_2\int_{3B} | \bar{u} |^p \bar{u}^{-p}\eta^p \mathrm{d}x +$$

$$pC_3\int_{3B} \eta^{p-1}\bar{u}^{1-p} | \nabla\eta | | \nabla u |^{p-1}\mathrm{d}x +$$

$$p\bar{C}_4\int_{3B} | \bar{u} |^{p-1}\eta^{p-1}\bar{u}^{1-p} | \nabla\eta | \mathrm{d}x +$$

$$\bar{C}_5\int_{3B} | \bar{u} |^{p-1}\eta^p \bar{u}^{1-p}\mathrm{d}x \qquad (4)$$

又因为 $v = \log\bar{u}$,则 $\nabla v = \dfrac{\nabla\bar{u}}{\bar{u}}$,代入整理式(4)得

$$(1-p)C_1\int_{3B} | \eta\nabla v |^p \mathrm{d}x \leqslant pC_3\int_{3B} | \eta\nabla v |^{p-1} | \nabla\eta | \mathrm{d}x +$$

$$p\bar{C}_4\int_{3B} \eta^{p-1} | \nabla\eta | \mathrm{d}x + [(1-p)\bar{C}_2 + \bar{C}_5]\int_{3B} \eta^p \mathrm{d}x =$$

$$I_1 + I_2 + I_3 \qquad (5)$$

令 $B_1 = B(x,h)$,在 B_1 内取截断函数 $\eta \in C_0^\infty(3B)$,满足在 B_1 内,$\eta = 1$,在 $3B \backslash B_1$ 内,$0 \leqslant \eta \leqslant 1$。所以,$\eta$ 在 $\dfrac{3}{2}B_1$ 上具有紧支集,且 $| \nabla\eta | \leqslant \dfrac{3}{h}$,则式(5)中,对 I_1 由 Hölder 不等式,有

$$\int_{3B} | \eta\nabla v |^{p-1} | \nabla\eta | \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\left(\int_{\frac{3}{2}B_1} | \nabla\eta |^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{3}{2}B_1} | \eta\nabla v |^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant$$

$$\frac{3}{h}\left|\frac{3}{2}B_1\right|^{\frac{1}{p}} \| \eta\nabla v \|_{p,3B}^{p-1}$$

对 I_2,有

$$\int_{3B} \eta^{p-1} | \nabla\eta | \mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{h}\left|\frac{3}{2}B_1\right| \leqslant \frac{3}{h}\left(\frac{3R}{h}\right)^{p-1}\left|\frac{3}{2}B_1\right|$$

对 I_3,有

$$\int_{3B} \eta^p \mathrm{d}x \leqslant \left|\frac{3}{2}B_1\right| \leqslant \left(\frac{3R}{h}\right)^p \left|\frac{3}{2}B_1\right|$$

将 I_1、I_2、I_3 代入式(5),从而

$$(1-p)C_1 \| \eta\nabla v \|_{p,3B}^p \leqslant \frac{3pC_3}{h}\left|\frac{3}{2}B_1\right|^{\frac{1}{p}} \| \eta\nabla v \|_{p,3B}^{p-1} +$$

$$3p\bar{C}_4\frac{(3R)^{p-1}}{h^p}\left|\frac{3}{2}B_1\right| + [(1-p)\bar{C}_2 + \bar{C}_5]\left(\frac{3R}{h}\right)^p \left|\frac{3}{2}B_1\right|$$

由引理1,$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = \dfrac{1}{p}$,又因为在 B_1 中,$\eta = 1$,所以有

$$\| \eta\nabla v \|_{p,3B} = \| \nabla v \|_{p,B_1} \leqslant \mathrm{ch}^{-1}\left|\frac{3}{2}B_1\right|^{\frac{1}{p}}$$

再由引理2得

$$\int_{B_1} | v - v_{B_1} | \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{ch}\left|\frac{3}{2}B_1\right|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_1} | \nabla v |^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$c | B_1 |$$

其中 $c = c(p)$,引理得证。

注2 由引理6可得,存在正数 r_0、c_0,使得

$$\left(\int_{B_1} e^{r_0 v}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{B_1} e^{-r_0 v}\mathrm{d}x\right) = \left(\int_{B_1} e^{r_0(v-v_B)}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{B_1} e^{r_0(v_B - v)}\mathrm{d}x\right) \leqslant$$

$$\int_{B_1} e^{r_0 | v - v_B |}\mathrm{d}x \leqslant c_0^2 | B_1 |^2$$

因为 $B_1 \subset 2B$,所以有

$$\left(\int_{2B} e^{r_0 v}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{2B} e^{-r_0 v}\mathrm{d}x\right) \leqslant c_0^2 | B_1 |^2$$

即

$$\left(\int_{2B} \bar{u}^{r_0}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_0}} \leqslant c | B_1 |^{\frac{2}{r_0}} \left(\int_{2B} \bar{u}^{-r_0}\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{r_0}} \qquad (6)$$

为了得到 Moser 迭代的格式,需要下面的引理。

引理7 设 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\Omega)$ 为方程(1)在 Ω 中的非负解,$\beta \in \mathbb{R}$ 且 $\beta \neq 0$、$\beta \neq 1-p$,令 $pq = p + \beta - 1$,则存在 $c > 0$,使得当 $\beta > 0$ 时,

$$\| \bar{u}^q \|_{\chi p, B(h')} \leqslant c | B |^{\frac{1-\chi}{\chi p}} R(1+\beta^{-1})(1+q)^p (h - h')^{-1} \| \bar{u}^q \|_{p,B(h)}$$

其中 $0 < h' < h < 3R$,$\chi = \dfrac{n}{n-p} > 1$。

证明:取 $\eta \in C_0^\infty(B)$,$\eta \geqslant 0$,$\varphi(x) = \eta^p \bar{u}^\beta \in W_0^{1,p}(B)$,则 $\nabla\varphi = \beta\bar{u}^{\beta-1}\eta^p \nabla\bar{u} + p\eta^{p-1}\bar{u}^\beta \nabla\eta$,由于 u 为方程(1)的解,则由定义1及结构条件(3)得

$$0 = \int_B A(x,u,\nabla u)\nabla\varphi \mathrm{d}x + \int_B B(x,u)\varphi \mathrm{d}x =$$

$$\int_B A(x,u,\nabla u)\beta\bar{u}^{\beta-1}\eta^p\nabla\bar{u}\mathrm{d}x +$$

$$\int_B A(x,u,\nabla u)p\eta^{p-1}\bar{u}^{\beta}\nabla\eta\mathrm{d}x + \int_B B(x,u)\eta^p\bar{u}^{\beta}\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\beta C_1\int_B \bar{u}^{\beta-1}\eta^p\mid\nabla u\mid^p\mathrm{d}x - \beta\bar{C}_2\int_B \bar{u}^{\beta-1}\eta^p\mid\bar{u}\mid^p\mathrm{d}x -$$

$$pC_3\int_B \eta^{p-1}\bar{u}^{\beta}\mid\nabla\eta\mid\mid\nabla u\mid^{p-1}\mathrm{d}x -$$

$$p\bar{C}_4\int_B \eta^{p-1}\bar{u}^{\beta}\mid\nabla\eta\mid\mid\bar{u}\mid^{p-1}\mathrm{d}x - \bar{C}_5\int_B \eta^p\bar{u}^{\beta}\mid\bar{u}\mid^{p-1}\mathrm{d}x =$$

$$\beta C_1\int_B \eta^p\mid\bar{u}^{q-1}\nabla u\mid^p\mathrm{d}x - \beta\bar{C}_2\int_B (\eta\mid\bar{u}\mid^q)^p\mathrm{d}x -$$

$$pC_3\int_B \eta^{p-1}\mid\bar{u}^{q-1}\nabla u\mid^{p-1}\bar{u}^{q}\mid\nabla\eta\mid\mathrm{d}x -$$

$$p\bar{C}_4\int_B \eta^{p-1}\mid\nabla\eta\mid\mid\bar{u}\mid^{pq}\mathrm{d}x - \bar{C}_5\int_B \eta^p\mid\bar{u}\mid^{pq}\mathrm{d}x \quad (7)$$

取 $v = \bar{u}^q$,则 $\nabla v = q\bar{u}^{q-1}\nabla\bar{u}$,代入式(7) 整理得

$$\frac{\beta C_1}{q^p}\parallel\eta\nabla v\parallel_{p,B}^p \leqslant (\beta\bar{C}_2 + \bar{C}_5)\int_B (\eta v)^p\mathrm{d}x +$$

$$\frac{pC_3}{q^{p-1}}\int_B (\eta\nabla v)^{p-1}v\mid\nabla\eta\mid\mathrm{d}x + p\bar{C}_4\int_B \eta^{p-1}\mid\nabla\eta\mid v^p\mathrm{d}x =$$

$$J_1 + J_2 + J_3 \quad (8)$$

则对(8) 式中的 J_1,由 Hölder 不等式得

$$\int_B (\eta v)^p\mathrm{d}x = \int_B (\eta v)(\eta v)^{p-1}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\left(\int_B (\eta v)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_B (\eta v)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\parallel\eta v\parallel_p\left(\left(\int_B (\eta v)^{\chi p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\chi}}\mid B\mid^{\frac{\chi-1}{\chi}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant$$

$$\parallel\eta v\parallel_p\mid B\mid^{\frac{(\chi-1)(p-1)}{\chi p}}\parallel\eta v\parallel_{\chi p}^{p-1} \leqslant$$

$$cR^{p-1}\parallel\eta v\parallel_p(\parallel\eta\nabla v\parallel_p^{p-1} + \parallel v\nabla\eta\parallel_p^{p-1})$$

对 J_2,由 Hölder 不等式有

$$\int_B (\eta\nabla v)^{p-1}v\mid\nabla\eta\mid\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\left(\int_B (\eta\nabla v)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_B\mid v\nabla\eta\mid^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\parallel\eta\nabla v\parallel_p^{p-1}\parallel v\nabla\eta\parallel_p$$

对 J_3,与 J_1 的处理方法相同,有

$$\int_B \eta^{p-1}\mid\nabla\eta\mid v^p\mathrm{d}x = \int_B \eta^{p-1}v^{p-1}v\mid\nabla\eta\mid\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\left(\int_B (\eta v)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_B\mid v\nabla\eta\mid^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$cR^{p-1}\parallel v\nabla\eta\parallel_p(\parallel\eta\nabla v\parallel_p^{p-1} + \parallel v\nabla\eta\parallel_p^{p-1})$$

将 J_1、J_2、J_3 代入式(8) 整理得

$$\frac{\beta C_1}{q^p}\parallel\eta\nabla v\parallel_{p,B}^p \leqslant$$

$$(\beta\bar{C}_2 + \bar{C}_5)cR^{p-1}\parallel\eta v\parallel_p(\parallel\eta\nabla v\parallel_p^{p-1} +$$

$$\parallel v\nabla\eta\parallel_p^{p-1}) +$$

$$\frac{pC_3}{q^{p-1}}\parallel\eta\nabla v\parallel_p^{p-1}\parallel v\nabla\eta\parallel_p +$$

$$p\bar{C}_4cR^{p-1}\parallel v\nabla\eta\parallel_p(\parallel\eta\nabla v\parallel_p^{p-1} + \parallel v\nabla\eta\parallel_p^{p-1}) \quad (9)$$

令 $z = \dfrac{\parallel\eta\nabla v\parallel_p}{\parallel v\nabla\eta\parallel_p}$,$\zeta = \dfrac{\parallel\eta v\parallel_p}{\parallel v\nabla\eta\parallel_p}$,在式(9) 两边同乘 q^p 得

$$\beta z^p \leqslant c[qz^{p-1} + q^p\zeta(z^{p-1}+1) + q^p(1+z^{p-1})] =$$

$$c[qz^{p-1} + (q^p\zeta + q^p)z^{p-1} + (q^p\zeta + q^p)]$$

由引理 1,$\gamma_1 = \gamma_2 = 1$,$\gamma_3 = \dfrac{1}{p}$,则

$$z \leqslant \frac{cq}{\beta} + \frac{c(q^p\zeta + q^p)}{\beta} + \left(\frac{c(q^p\zeta + q^p)}{\beta}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$c(1+\beta^{-1})(1+q^p) + c(1+\beta^{-1})(1+q^p)(1+\zeta) +$$

$$c(1+\beta^{-1})(1+q^p)(1+\zeta)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$c(1+\beta^{-1})(1+q^p)(1+\zeta)$$

从而有

$$\parallel\eta\nabla v\parallel_p \leqslant c(1+\beta^{-1})(1+q)^p(\parallel v\nabla\eta\parallel_p + \parallel\eta v\parallel_p)$$

再由引理 3,得

$$\parallel\eta v\parallel_{\chi p,B} \leqslant c\mid B\mid^{\frac{1-\chi}{\chi p}}R(1+\beta^{-1})(1+q)^p(\parallel v\nabla\eta\parallel_{p,B} +$$

$$\parallel\eta v\parallel_{p,B})$$

因为 $0 < h' < h \leqslant 3R$,$\eta \in C_0^{\infty}(B(h))$,使得在 $B(h')$ 中,$\eta = 1$,在 $B(h)$ 中,$0 \leqslant \eta \leqslant 1$,且 $\mid\nabla\eta\mid \leqslant \dfrac{3}{h-h'}$,则当 $\beta > 0$ 时,

$$\parallel\bar{u}^q\parallel_{\chi p,B(h')} \leqslant c\mid B\mid^{\frac{1-\chi}{\chi p}}R(1+\beta^{-1})(1+q)^p(h-h')^{-1}\parallel\bar{u}^q\parallel_{p,B(h)}$$

这就得到了 Moser 迭代的一般格式。

注 3　对于 $pq = p + \beta - 1$,当 $\beta \neq 0$ 且 $\beta \neq 1-p$ 时,可分为 $\beta > 0$、$1-p < \beta < 0$、$\beta < 1-p$ 3 种情况。$1-p < \beta < 0$ 和 $\beta < 1-p$ 的情况,证明方法与 $\beta > 0$ 时类似,且 $1-p < \beta < 0$ 和 $\beta < 1-p$ 的结果与 $\beta > 0$ 的结果只在系数上有细微的差别,这里不再证明。

2 主要定理及证明

定理1 (Harnack 不等式) 设 $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为方程(1)在 Ω 中的非负解,对于给定的 $R_0 > 0$,则存在 $c > 0$,使得

$$\operatorname{ess\,sup}_B u \leqslant c \operatorname{ess\,inf}_B (u + R)$$

其中 $R \leqslant R_0$,这里 $c = c(n,p,R_0)$。

证明:由引理7,令 $r = pq = p + \beta - 1$,对 $r > 0$ 且 $r \neq p-1$ 时,有

$$\left(\int_{B(h')} \bar{u}^{\chi r}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\chi r}} \leqslant (c \mid B \mid^{\frac{1-\chi}{\chi p}} R(1 + \mid \beta \mid^{-1})(1 + r)^p (h - h')^{-1})^{\frac{p}{r}} \left(\int_{B(h)} \bar{u}^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \tag{10}$$

令 $r_l = \chi^l r_0'$、$l = 0,1,2,\cdots$、$h_l = R\left(1 + \frac{1}{2^l}\right)$、$h_l' = h_{l+1}$,取 $r_0' < r_0$,使得 $\chi^l r_0' < r < \chi^{l+1} r_0'$,即 $r_l < p-1 < r_{l+1}$,则

$$\mid \beta \mid = \mid r_{l+1} - (p-1) \mid \geqslant \mid r_l - (p-1) \mid \geqslant \cdots \geqslant \mid r_0 - (p-1) \mid > 0$$

所以 $\mid \beta \mid$ 有界,则 $(1 + \mid \beta \mid^{-1})$ 有界,又因为 $(h - h')^{-1} = \left(\frac{R}{2^{l+1}}\right)^{-1} = \frac{2^{-l-1}}{R}$,于是式(10)可改写为

$$\left(\int_{B(h_l')} \bar{u}^{r_{l+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_{l+1}}} \leqslant c^{\frac{1}{\chi^l}} \mid 3B \mid^{\frac{1-\chi}{\chi^l r_0'} \frac{lp}{\chi^l r_0'}} ((1 + \chi^l r_0')^{\frac{p^2}{r_0'}})^{\frac{1}{\chi^l}} \left(\int_{B(h_l)} \bar{u}^{r_l}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_l}} \leqslant c_1^{\frac{1}{\chi^l}} c_2^{\frac{l}{\chi^l}} \mid 3B \mid^{\frac{1-\chi}{\chi^l r_0'}} \left(\int_{B(h_l)} \bar{u}^{r_l}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_l}} \tag{11}$$

迭代(11)式可得

$$\operatorname{ess\,sup}_B \bar{u} \leqslant c \mid 3B \mid^{-\frac{1}{r_0'}} \left(\int_{2B} \bar{u}^{r_0'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_0'}} \tag{12}$$

再由引理7,令 $s = pq = \beta - p + 1$,考虑 $\beta < 1 - p$ 的情形,即 $s < 0$,且 $q < 0$,则

$$\left(\int_{B(h')} \bar{u}^{\chi s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\chi s}} \geqslant (c \mid 3B \mid^{\frac{1-\chi}{\chi p}} R(1 + \mid s \mid^p)(h - h')^{-1})^{\frac{p}{r}} \left(\int_{B(h)} \bar{u}^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}$$

令 $s_l = -\chi^l r_0$、$l = 0,1,2,\cdots$、$h_l = R\left(1 + \frac{1}{2^l}\right)$、$h_l' = h_{l+1}$,则

$$\left(\int_{B(h_l')} \bar{u}^{r_{l+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_{l+1}}} \geqslant c^{-\frac{1}{\chi^l}} \mid 3B \mid^{\frac{1-\chi}{-\chi^l r_0'} 2^{-\frac{lp}{\chi^l r_0}}} ((1 + \chi^l r_0')^{\frac{p^2}{r_0'}})^{\frac{1}{\chi^l}} \left(\int_{B(h_l)} \bar{u}^{s_l}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_l}} \geqslant c_1^{-\frac{1}{\chi^l}} c_2^{-\frac{l}{\chi^l}} \mid 3B \mid^{\frac{1-\chi}{\chi^l r_0}} \left(\int_{B(h_l)} \bar{u}^{s_l}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_l}} \tag{13}$$

迭代式(13)可得

$$\operatorname{ess\,inf}_B \bar{u} \geqslant c^{-1} \mid 3B \mid^{\frac{1}{r_0}} \left(\int_{2B} \bar{u}^{-r_0}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_0}} \tag{14}$$

结合式(6)、(12)、(14),再利用 Hölder 不等式可得

$$\operatorname{ess\,sup}_B \bar{u} \leqslant c \mid 3B \mid^{-\frac{1}{r_0'}} \left(\int_{2B} \bar{u}^{r_0'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_0'}} \leqslant c \mid 3B \mid^{-\frac{1}{r_0}} \left(\int_{2B} \bar{u}^{r_0}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r_0}} \leqslant c \mid 3B \mid^{\frac{1}{r_0}} \left(\int_{2B} \bar{u}^{-r_0}\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{r_0}} \leqslant c \operatorname{ess\,inf}_B \bar{u}$$

定理即证。

下面证明主要定理。

定理2 (Hölder 连续性) 设 $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为方程(1)的解,$x_0 \in \Omega$,使得 $B(x_0,R) \subset \Omega$,且在 $B(x_0,R)$ 中 $\mid u \mid \leqslant L$ 几乎处处成立,则存在 $0 < \alpha < 1$,使得

$$\operatorname{ess\,sup}_{B(x_0,\rho)} u - \operatorname{ess\,inf}_{B(x_0,\rho)} u \leqslant c\left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha$$

其中 $0 < \rho < R$,$c = c(n,p,R,L)$。

证明:对于 $0 < r < R$,在 $B(r)$ 中,记 $M(r) = \operatorname{ess\,sup}_{B(x_0,\rho)} u$,$m(r) = \operatorname{ess\,inf}_{B(x_0,\rho)} u$,分别表示 u 在球 $B(x_0,\rho)$ 上的本性上确界和本性下确界。$\omega(r) = M(r) - m(r)$,记 $\tilde{u} = M(r) - u$,$\tilde{\tilde{u}} = u - m(r)$,很显然有 $\tilde{u} \geqslant 0$,$\tilde{\tilde{u}} \geqslant 0$,并且 $\tilde{u}$ 是方程

$$\operatorname{div} \tilde{A}(x,\tilde{u},\nabla\tilde{u}) = \tilde{B}(x,\tilde{u})$$

的解,其中 $\tilde{A}(x,\tilde{u},\nabla\tilde{u}) = A(x,M-\tilde{u},-\nabla\tilde{u})$,$\tilde{B}(x,\tilde{u}) = B(x,M-\tilde{u})$,满足

$$\mid \tilde{A}(x,\tilde{u},\nabla\tilde{u}) \mid \leqslant C_3 \mid \nabla\tilde{u} \mid^{p-1} + \tilde{C}_4 \mid \tilde{u} \mid^{p-1}$$

$$\mid \tilde{B}(x,\tilde{u}) \mid \leqslant \tilde{C}_5 \mid \tilde{u} \mid^{p-1}$$

其中 $\tilde{C}_4$、$\tilde{C}_5$ 分别为与 C_4、C_5 相关的常数。

则对 $\tilde{u} = M(r) - u$ 使用定理1得

$$\sup_{B\left(\frac{r}{3}\right)} \{M(r) - u\} \leqslant c\left\{\inf_{B\left(\frac{r}{3}\right)} (M(r) - u) + r\right\}$$

即

$$M(r) - m\left(\frac{r}{3}\right) \leqslant c\left\{M(r) - M\left(\frac{r}{3}\right) + r\right\} \quad (15)$$

同样地,对$\tilde{u} = u - m(r)$ 使用定理 1 得

$$M\left(\frac{r}{3}\right) - m(r) \leqslant c\left\{m\left(\frac{r}{3}\right) - m(r) + r\right\} \quad (16)$$

则由式(15) ~ (16) 可得

$$M\left(\frac{r}{3}\right) - m\left(\frac{r}{3}\right) \leqslant \frac{c-1}{c+1}\{M(r) - m(r)\} + \frac{2c}{c+1}r$$

则有

$$\omega\left(\frac{r}{3}\right) \leqslant \theta\left\{\omega(r) + \tau\left(\frac{r}{R}\right)\right\}$$

其中 $\theta = \frac{c-1}{c+1}$、$\tau = \frac{2cR}{c+1}$。

因为 ω 单调递增,则 $\forall s \geqslant 3$、$0 < r \leqslant R$,都有

$$\omega\left(\frac{r}{s}\right) \leqslant \theta\left\{\omega(r) + \tau\left(\frac{r}{R}\right)\right\}$$

对于 $l = 1,2,3,\cdots$,取 s,使 $\theta s = 3$,则通过迭代

$$\omega\left(\frac{R}{s^l}\right) \leqslant \theta\left\{\omega\left(\frac{R}{s^{l-1}}\right) + \tau\left(\frac{1}{s^{l-1}}\right)\right\} \leqslant \cdots \leqslant \theta^l\{\omega(R) + \tau[(\theta s)^{-1} + (\theta s)^{-2} + \cdots + (\theta s)^{-l+1}]\}$$

所以有

$$\omega\left(\frac{R}{s^l}\right) \leqslant \theta^l\{\omega(R) + 2\tau\}$$

又对 $0 < \rho < \frac{R}{s}$,取 l,可使 $\frac{R}{s^{l+1}} < \rho < \frac{R}{s^l}$,从而可得

$$\omega(\rho) \leqslant \omega\left(\frac{R}{s^l}\right) \leqslant \theta^l\{\omega(R) + 2\tau\} \quad (17)$$

取 $\gamma = -\log_3\theta$,即 $s^{-\gamma} = \theta^{1+\gamma}$,两边取对数得 $-\gamma\log s = (1+\gamma)\log\theta$,于是有 $\theta = s^{-\alpha}$,其中 $\alpha = \frac{\gamma}{1+\gamma}$,所以

$$\theta^l = s^{-\alpha l} = \left(\frac{R}{s^{l+1}}\frac{s}{R}\right)^{\alpha} \leqslant c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha} \quad (18)$$

又因为 $|u| \leqslant L$,所以

$$\omega(R) + 2\tau \leqslant c(L+R) \quad (19)$$

将式(18) ~ (19) 代入式(17),可得

$$\omega(\rho) \leqslant c(L+R)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha}(\rho < R)$$

定理得证。

3　结　语

本文研究了一类 A – 调和方程的局部 Hölder 连续性。借助常用的基本不等式及 Moser 迭代,证明了方程解的 Harnack 不等式,这在解的性质的研究中发挥着重要的作用,同时也直接得出了解的 Hölder 连续性。

参 考 文 献:

[1] MOSER J. A New Proof of De Giorgi's Theorem Concerning the Regularity Problem for Elliptic Differential Equations[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics,1960,13(3):457.

[2] SERRIN J. Local Behavior of Solutions of Quasilinear Equations[J]. Acta Mathmatical,1964,111:247.

[3] HEINONEN J, KILPELÄINEN T, MARTIO O. Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations [M]. New York: Dover Publications,1993.

[4] KILPELÄINEN T. Hölder Continuity of Solutions to Quasilinear Elliptic Equations Involving Measure[J]. Potential Analysis,1994,3(3):265.

[5] ONO T. On Solutions of Quasilinear Partial Differential Equation-div $A(x, \nabla u) + B(x, u) = 0$[J]. RIMS Kokyuroku,1997,1016:146.

[6] EVANS L C. Partial Differential Equations[M]. New York: American Mathematical Society,1998.

[7] GILBARG D, TRUDINGER N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order [M]. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg,2001.

[8] 李贯锋. 几类非齐次 A – 调和方程的研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2013.

[9] ALVINO A. Sharp a Priori Estimates for Some Nonlinear Elliptic Problems[J]. Bollettino Delle Sedute Della Accademia Gioenia Di Scienze Naturali in Catania, 2013,46 (376):2.

[10] ALVINO A, FERONE V, MERCALDO A. Sharp a Priori Estimates for a Class of Nonlinear Elliptic Equations with Lower Order Terms[J]. Annali Di Matematica, 2015, 194:1169.

[11] ZHENG Shenzhou, FENG Zhaosheng. Optimal Regularity for A-harmonic Type Equations Under the Natural Growth [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B,2011,16(2):669.

[12] 倪君, 曹振华, 包革军. 关于非齐次 A – 调和方程的一些估计[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2014,31 (3):320.

NI Jun, CAO Zhenhua, BAO Gejun. Some Estimates for Nonhomogenous A-harmonic Equation [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2014,31(3): 320.

[13] EDWARD J, HUDSON S, LECKBAND M. Regularity of Solutions of Quasilinear Elliptic Equations with $L\log^m L$ Coefficients[J]. Journal of Differential Equations, 2019, 268(9):1.

[14] DI F G, NGUYEN T. Regularity Estimates in Weighted Morrey Spaces for Quasilinear Elliptic Equations[J]. Revista Matemática Iberoamericana, 2020, 36(6):1627.

[15] GIANNETTI F, MOSCARIELLO G. Partial Differential Equations Regularity Results of Solutions of Quasilinear Systems Having Singularities in the Coefficients [J]. Rendiconti Lincei Matematica e Applicazioni, 2023, 34 (3):597.

[16] IWANIEC T, LUTOBORSKI A. Integral Estimates for Null Lagrangians [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1993, 125:25.

[17] IWANIEC T, SCOTT C, STROFFOLINI B. Nonlinear Hodge Theory on Manifolds with Boundary [J]. Annali Di Matematica Pura Ed Applicata, 1999, 177(1):37.

[18] 吕月明,李小欢. Orlicz 空间中一类椭圆型方程解的迭代算子范数估计[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2023, 28 (6):138.
LÜ Yueming, LI Xiaohuan. Iterator Operator Norm Estimation for Solutions to a Class of Elliptic Equations in Orlicz Space [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2023, 28(6):138.

[19] 戴志敏,陈映瞳. 具有非标准增长条件的微分形式的 Caccioppoli 不等式及其高阶可积性[J]. 数学杂志, 2023, 43(3):189.
DAI Zhimin, CHEN Yingtong. Caccioppoli Inequality and Higher Integrability for Differential Forms with Non-Standard Growth Conditions[J]. Journal of Mathematics, 2023, 43(3):189.

[20] HAN Qing, LIN Fanghua. Elliptic Partial Differential Equations[M]. New York: American Mathematical Society, 2011.

(编辑:温泽宇)