# 多层异构有向网络预定时间层内同步

严嘉欣,宁娣*
(中南民族大学 数学与统计学学院,湖北 武汉 430074)

**摘 要** 研究了节点动力学不同、层内拓扑结构有向且异构的多层网络模型的预定时间层内同步问题.与有限时间和固定时间同步不同,该同步时间可根据用户需求预先设定,且不受初始值和控制参数影响.利用Lyapunov稳定性理论和$M$-矩阵的性质,得到了多层网络预定时间层内同步的充分判据.最后,通过数值仿真验证了理论结果的有效性.

**关键词** 多层网络;有向拓扑;预定时间控制;层内同步
**中图分类号** O231;O193 **文献标志码** A **文章编号** 1672-4321(2026)04-0569-08
**doi**:10.20056/j.cnki.ZNMDZK.20260710

# Prescribed-time intra-layer synchronization in multiplex heterogeneous directed networks

Yan Jiaxin, Ning Di*
(College of Mathematics and Statistics, South-Central Minzu University, Wuhan 430074, Hubei China)

**Abstract** The prescribed-time intra-layer synchronization problem of multiplex networks model with different node dynamics and directed and heterogeneous intra-layer topological structures is studied. Unlike finite-time and fixed-time synchronization, this synchronization time can be preset according to user's requirements and is not affected by the initial state and control parameters. By using the Lyapunov stability theory and the properties of the $M$-matrix, a sufficient criterion for prescribed-time intra-layer synchronization of multiplex networks is obtained. Finally, the validity of the theoretical results is verified through numerical simulation.

**Keywords** multiplex networks; directed topology; prescribed-time control; intra-layer synchronization

在过去的几十年里,复杂网络因其丰富的理论价值和广泛的实际应用而备受关注[1-3].随着网络科学的发展,包含社交网络、神经网络在内的许多现实世界的网络已难以用单层网络模型简单概括.例如,在多平台社交网络[4]中,用户可能同时拥有多个账号,每个平台都会生成特定类型的社会关系.在三层交通网络中,乘客可以在地铁、航空、高铁等不同的网络层之间进行换乘.因此,相较于单层网络,多层网络能更合理地描述这些具有多种互动模式的现实网络结构.这类网络由若干层构成,各层节点数量相同,不同层级代表节点间不同类型的互动.同一层级中的每个节点在其他所有层级中都有对应节点,各层级仅通过跨层级对应节点实现交互.近年来,有关多层网络的研究关注度持续攀升.

作为一种典型的集体行为,同步在自然界和人造社会中普遍存在.近年来,多层网络的同步问题已得到广泛研究.例如,Liu等[5]基于超拉普拉斯矩阵的特性,利用牵制控制方法,提出了多层网络实现层内同步的充分条件.Ning等[6]设计了脉冲牵制控制器,以实现多层网络的leader-following同步.Khalaf等[7]分析了线性耦合基因振荡器网络中的层间同步与层内同步现象.

值得注意的是,以往大多数研究成果提出的控制方案所设定的收敛时间往往是无限或不确定的.然而,在实际要求和应用中,通常需要在有限时间内实现同步,针对这一问题,文献[8-10]提出了多种

**收稿日期** 2025-09-06
* **通信作者** 宁娣(1981-),女,副教授,博士,研究方向:复杂网络同步与控制,E-mail:dning@scuec.edu.cn
**基金项目** 国家自然科学基金资助项目(61703442);冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室开放基金资助项目(Y202205)

有限时间控制策略.研究发现,达到同步所需要的有限稳定时间受初始值和控制参数的限制.但是,由于外部环境的干扰和网络内部因素的影响,使得获取初始状态变得困难,进而无法准确估计稳定时间.鉴于有限时间控制方法的这一缺陷,Polyakov等[11]提出了固定时间控制方法,该方法无需任何初始信息即可在有限时间内实现同步,其稳定时间仅由控制参数确定.事实上,若稳定时间能独立于初始值和控制参数,并根据任务需求进行预设,则更具实用价值.针对这一需求,Wang等[12]构建了新型标度函数,既能获得预定的收敛时间,又能确保多智能体系统在具有有向生成树的拓扑结构下实现预定时间一致性.Chen等[13]研究了有和没有时变延迟的情况下复杂动态网络预定时间同步问题.

目前,预定时间控制已成为网络科学的热门话题之一,然而,有关预定时间控制的研究大多集中在系统[14]或单层网络[15-16]上,缺乏与多层网络预定时间控制相关的研究.受上述研究启发,本文通过在控制器中引入时变标度函数,利用Lyapunov稳定性理论和$M$-矩阵的性质,得到了两层网络预定时间层内同步准则,所得结果可扩展到多层网络.

符号说明:$\mathbb{R}^n$表示$n$维欧几里得空间,$1_N$表示一个元素全为1的$N$维列向量;对于对称矩阵$C\in\mathbb{R}^{N\times N}$,$C>0$意味着$C$是正定的;$I_N$和$0_N$分别表示$N$阶单位矩阵和$N$阶零矩阵;$\lambda_{\max}(C)$和$\lambda_{\min}(C)$分别表示$C$的最大特征值和最小特征值.

## 1 预备知识

考虑每层节点动力学和拓扑结构不同的两层网络,模型如下:

$$\begin{cases}\dot{x}_i^1(t)=f_1\left(x_i^1(t)\right)-c\sum\limits_{j=1}^{N}l_{ij}^1x_j^1(t)+u_i^1(t),\\ \dot{x}_i^2(t)=f_2\left(x_i^2(t)\right)-c\sum\limits_{j=1}^{N}l_{ij}^2x_j^2(t)+u_i^2(t),\end{cases}\tag{1}$$

这里$x_i^1(t)\in\mathbb{R}^n$,$i=1,2,\cdots,N$表示第一层第$i$个节点的状态向量,$f_1(x_i^1(t))$:$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$表示第一层第$i$个节点的自身动力学,参数$c$表示层内耦合强度,$\boldsymbol{L}_1=(l_{ij}^1)\in\mathbb{R}^{N\times N}$表示第一层的拉普拉斯矩阵,当从节点$j$到节点$i$存在有向边时,令$l_{ij}^1=-1$,否则,令$l_{ij}^1=0$,此外,$l_{ii}^1=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}l_{ij}^1.u_i^1(t)$表示对第一层第$i$个节点施加的外部控制.第二层中的$x_i^2(t)$,$f_2(x_i^2(t))$,$l_{ij}^2$和$u_i^2(t)$与第一层中的$x_i^1(t)$,$f_1(x_i^1(t))$,$l_{ij}^1$和$u_i^1(t)$具有相同的意义.

为了实现预定时间控制,下面介绍一种时变函数[12],其定义为:

$$\gamma(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{\hat{T}_P}{\hat{T}_P+t_0-t}\right)^a, & t\in[t_0,t_1),\\ 1, & t\in[t_1,\infty),\end{cases}\tag{2}$$

这里$a>2$是一个可以任意取值的实数,$\hat{T}_P$是由用户提前设定的稳定时间,$0<T_s\leqslant\hat{T}_P$,$T_s$表示信息传输和信号处理所需的时间,$t_1=t_0+\hat{T}_P$.该函数求导可得:

$$\dot{\gamma}(t)=\begin{cases}\dfrac{a}{\hat{T}_P}\gamma(t)^{1+\frac{1}{a}} & t\in[t_0,t_1),\\ 0 & t\in[t_1,\infty).\end{cases}\tag{3}$$

为获得层内同步,第一层和第二层的目标轨迹分别由$s_1(t)$和$s_2(t)$表示,且满足:

$$\begin{cases}\dot{s}_1(t)=f_1\left(s_1(t)\right)+\left(c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)}\right)\left(s_2(t)-s_1(t)\right),s_1(0)=s_{10},\\ \dot{s}_2(t)=f_2\left(s_2(t)\right)+\left(c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)}\right)\left(s_1(t)-s_2(t)\right),s_2(0)=s_{20},\end{cases}\tag{4}$$

这里$\varepsilon$表示层间耦合强度,$d$表示控制强度.

控制器设计如下:

$$\begin{cases}u_i^1(t) &=-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})(x_i^1(t)-s_1(t))-(\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\sum\limits_{j=1}^{N}l_{ij}^1x_j^1(t)+\\ &\quad(c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\left(x_i^2(t)-x_i^1(t)\right),\quad 1\leqslant i\leqslant N,\\ u_i^2(t) &=-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})(x_i^2(t)-s_2(t))-(\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\sum\limits_{j=1}^{N}l_{ij}^2x_j^2(t)+\\ &\quad(c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\left(x_i^1(t)-x_i^2(t)\right),\quad 1\leqslant i\leqslant N.\end{cases}\tag{5}$$

定义误差向量$e_i^1(t)=x_i^1(t)-s_1(t)$,$e_i^2(t)=x_i^2(t)-s_2(t)$,由此可得两层网络(1)的误差动力学

表达式如下：

$$\begin{cases} \dot{e}_i^1(t) = f_1(x_i^1(t)) - f_1(s_1(t)) - (c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})e_i^1(t) - (c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\sum\limits_{j=1}^{N} l_{ij}^1 e_j^1(t) + \\ \qquad (c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\left(e_i^2(t) - e_i^1(t)\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \\ \dot{e}_i^2(t) = f_2(x_i^2(t)) - f_2(s_2(t)) - (c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})e_i^2(t) - (c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\sum\limits_{j=1}^{N} l_{ij}^2 e_j^2(t) + \\ \qquad (c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\left(e_i^1(t) - e_i^2(t)\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \end{cases} \tag{6}$$

## 2　相关定义、假设和引理

**定义 1** 若存在一个独立于初始状态和其他参数的预定时间 $\hat{T}_P$，使得对于 $i=1,2,\cdots,N$，有 $\lim_{t\to\hat{T}_P}\|x_i^1(t)-s_1(t)\|=0$ 和 $\lim_{t\to\hat{T}_P}\|x_i^2(t)-s_2(t)\|=0$ 成立，且当 $t\geqslant\hat{T}_P$ 时，有 $x_i^1(t)\equiv s_1(t)$ 和 $x_i^2(t)\equiv s_2(t)$ 成立，则称两层网络(1)实现了预定时间层内同步.

**假设 1** 存在一个正常数 $\varphi$，使得对于 $\forall\bar{x}(t),\bar{y}(t)\in\mathbb{R}^n$，都有以下不等式成立：

$$(\bar{x}(t)-\bar{y}(t))^{\mathrm{T}}(f_1(t,\bar{x}(t))-f_1(t,\bar{y}(t)))\leqslant\varphi(\bar{x}(t)-\bar{y}(t))^{\mathrm{T}}(\bar{x}(t)-\bar{y}(t)).$$

**假设 2** 存在一个正常数 $\psi$，使得对于 $\forall\hat{x}(t),\hat{y}(t)\in\mathbb{R}^n$，都有以下不等式成立：

$$(\hat{x}(t)-\hat{y}(t))^{\mathrm{T}}(f_2(t,\hat{x}(t))-f_2(t,\hat{y}(t)))\leqslant\psi(\hat{x}(t)-\hat{y}(t))^{\mathrm{T}}(\hat{x}(t)-\hat{y}(t)).$$

**引理 1**[12] 考虑以下系统：

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t)),x(0)=x_0, \tag{7}$$

若有以下不等式成立：

$$\dot{V}(t)\leqslant-\xi V(t)-2\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)}V(t),t\in[t_0,\infty), \tag{8}$$

则称系统(7)在函数(2)给出的预定时间 $\hat{T}_P$ 内达到全局稳定.这里 $V(t,x(t))$ 是一个连续可微的函数，且满足 $V(t,0)=0,V(t,x(t))>0$，$\xi$ 是一个正实数.此外，有以下式子成立：

$$\begin{cases} V(t)\leqslant\gamma(t)^{-2}\exp^{-\xi(t-t_0)}V(t_0),t\in[t_0,t_1), \\ V(t)\equiv 0,t\in[t_1,\infty). \end{cases} \tag{9}$$

**引理 2**[17] 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 是一个非奇异 $M$-矩阵，则存在一个正定对角矩阵 $\boldsymbol{P}=diag(p_1,p_2,\cdots,p_N)$，使得 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{P}>\boldsymbol{0}$ 成立，其中 $(p_1,p_2,\cdots,p_N)^{\top}=(\boldsymbol{A}^{\top})^{-1}1_N$.

**引理 3**[18] 设 $p(\lambda)$ 是给定的多项式，如果 $\lambda$ 是矩阵 $H$ 的特征值，而 $x$ 是相应的特征向量，那么 $p(\lambda)$ 是矩阵 $p(H)$ 的特征值，并且 $x$ 是属于 $p(H)$ 的特征向量.

## 3　主要结果

本节给出了两层网络实现预定时间层内同步的充分条件.

**定理 1** 设假设 1 和假设 2 成立，若满足以下不等式：

$$\sigma=(c+\varepsilon)\frac{\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{Q}})}{\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})}-2\max\{\varphi,\psi\}>0, \tag{10}$$

$$\mathrm{d}\frac{\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{Q}})}{\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})}\geqslant 2, \tag{11}$$

则两层网络(1)在控制器(5)的作用下可在预定时间 $\hat{T}_P$ 内实现预定时间层内同步，且同步状态在 $[t_0+\hat{T}_P,\infty)$ 上保持不变.

**证明**　设 $x(t)=((x_1^1(t))^{\top},\cdots,(x_N^1(t))^{\top},(x_1^2(t))^{\top},\cdots,(x_N^2(t))^{\top})^{\top}\in\mathbb{R}^{2Nn}$，

$E(t)=((e_1^1(t))^{\top},\cdots,(e_N^1(t))^{\top},(e_1^2(t))^{\top},\cdots,(e_N^2(t))^{\top})^{\top}\in\mathbb{R}^{2Nn}$，

误差系统(6)可改写为：

$$\dot{E}_i(t)=\begin{cases} f_1(x_i(t))-f_1(s_1(t))-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\sum\limits_{j=1}^{2N}\bar{\boldsymbol{L}}_{ij}E_j(t), & 1\leqslant i\leqslant N, \\ f_2(x_i(t))-f_2(s_2(t))-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\sum\limits_{j=1}^{2N}\bar{\boldsymbol{L}}_{ij}E_j(t), & N+1\leqslant i\leqslant 2N, \end{cases} \tag{12}$$

这里 $\bar{\boldsymbol{L}}=\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{I}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_N & 0_N\\ 0_N & \boldsymbol{I}_N\end{bmatrix},\hat{\boldsymbol{L}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1 & 0_N\\ 0_N & \boldsymbol{L}_2\end{bmatrix},\hat{\boldsymbol{I}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_N & -\boldsymbol{I}_N\\ -\boldsymbol{I}_N & \boldsymbol{I}_N\end{bmatrix}$.

从 $\bar{\boldsymbol{L}}$ 的定义可知，$\bar{\boldsymbol{L}}$ 的主对角线元素 $\bar{\boldsymbol{L}}_{ii}>0$，非主对角线元素 $\bar{\boldsymbol{L}}_{ij}\leqslant 0,i\neq j$，且 $\bar{\boldsymbol{L}}$ 严格对角占优，所有

特征值都具有正实部,由此可得$\bar{\boldsymbol{L}}$是一个非奇异$M$-矩阵.则由引理2可知,存在一个正定对角矩阵$\hat{\boldsymbol{P}}=\mathrm{diag}(\hat{p}_1,\hat{p}_2,\cdots,\hat{p}_{2N})$,且有$\hat{\boldsymbol{Q}}=\hat{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{L}}+\bar{\boldsymbol{L}}^{\top}\hat{\boldsymbol{P}}>\boldsymbol{0}$成立,这里正常数$\hat{p}_1,\hat{p}_2,\cdots,\hat{p}_{2N}$可由$(\hat{p}_1,\hat{p}_2,\cdots,\hat{p}_{2N})^{\top}=(\bar{\boldsymbol{L}}^{\top})^{-1}1_{2N}$确定.

设$F(t,x(t))=(f_1^{\top}(x_1^1(t)),\cdots,f_1^{\top}(x_N^1(t)),f_2^{\top}(x_1^2(t)),\cdots,f_2^{\top}(x_N^2(t)))^{\top}\in\mathbb{R}^{2Nn}$,

$F(t,s(t))=(f_1^{\top}(s_1(t)),\cdots,f_1^{\top}(s_1(t)),f_2^{\top}(s_2(t)),\cdots,f_2^{\top}(s_2(t)))^{\top}\in\mathbb{R}^{2Nn}$,

因此,误差系统可转换为另一形式:

$$\dot{E}(t)=F(t,x(t))-F(t,s(t))-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})(\bar{\boldsymbol{L}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t). \tag{13}$$

考虑以下候选Lyapunov函数:

$$V(t)=E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t), \tag{14}$$

且$V(t)$对变量$t$求导,可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&2E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\otimes\boldsymbol{I}_n)\dot{E}(t)=\\&2E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\otimes\boldsymbol{I}_n)[F(t,x(t))-F(t,s(t))-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})(\bar{\boldsymbol{L}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t)]=\\&2E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\otimes\boldsymbol{I}_n)[F(t,x(t))-F(t,s(t))]-2(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{L}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t),\end{aligned} \tag{15}$$

由假设1和假设2可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)\leqslant&2\max\{\varphi,\psi\}E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t)-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})E^{\top}(t)\left[(\hat{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{L}}+\bar{\boldsymbol{L}}^{\top}\hat{\boldsymbol{P}})\otimes\boldsymbol{I}_n\right]E(t)=\\&2\max\{\varphi,\psi\}E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t)-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{Q}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t)\leqslant\\&2\max\{\varphi,\psi\}E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t)-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\frac{\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{Q}})}{\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})}E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t)=\\&2\max\{\varphi,\psi\}V(t)-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\frac{\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{Q}})}{\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})}V(t)=-\\&((c+\varepsilon)\frac{\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{Q}})}{\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})}-2\max\{\varphi,\psi\})V(t)-\mathrm{d}\frac{\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{Q}})}{\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)}V(t).\end{aligned} \tag{16}$$

将(10)式和(11)式代入(16)式,可得:

$$\dot{V}(t)\leqslant-\sigma V(t)-2\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)}V(t), \tag{17}$$

这表明$V(t)$在$[t_0,t_1)$内单调递减,根据引理1可得:

$$V(t)\leqslant\gamma(t)^{-2}\exp^{-\sigma(t-t_0)}V(t_0). \tag{18}$$

注意到,当$t\to t_1^-$时$\gamma(t)^{-2}\to0$,进而可推出$V(t)\to0$.于是有:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{P}})\left\|E(t)\right\|^2\leqslant&E^{\top}(t)(\hat{\boldsymbol{P}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t)\leqslant\\&\gamma(t)^{-2}\exp^{-\sigma(t-t_0)}V(t_0)\leqslant\\&\gamma(t)^{-2}\exp^{-\sigma(t-t_0)}\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})\left\|E(t_0)\right\|^2.\end{aligned} \tag{19}$$

这意味着$t\to t_1^-$时,有$\left\|E(t)\right\|\to0$.因此,当$t\in[t_0,t_1)$,两层网络(1)可以在预定时间$\hat{T}_P$内实现同步.

下面考虑$t\in[t_1,\infty)$的情况,选取与(14)式相同的一个Lyapunov函数,并执行相同的步骤,可得:

$$\dot{V}(t)\leqslant-\sigma V(t)\leqslant0,t\in[t_1,\infty). \tag{20}$$

注意到$V(t)$是可微的,因此有:

$$0\leqslant V(t)\leqslant V(t_1)=V(t_1^-)\to0,t\in[t_1,\infty), \tag{21}$$

由此可得$V(t)\equiv0$,即在$[t_1,\infty)$上$E(t)\equiv\boldsymbol{0}$.综上所述,可知两层网络(1)在预定时间$\hat{T}_P$内实现同步,并在此后保持同步状态.

下面证明控制器(5)在$[t_0,\infty)$上是一致有界的.

对于$t\in[t_0,t_1)$,由(19)式可得:

$$\left\|E(t)\right\|\leqslant\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})}{\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{P}})}}\gamma(t)^{-1}\exp^{-\frac{\sigma(t-t_0)}{2}}\left\|E(t_0)\right\|. \tag{22}$$

设$U(t)=((u_1^1(t))^{\top},\cdots,(u_N^1(t))^{\top},(u_1^2(t))^{\top},\cdots,(u_N^2(t))^{\top})^{\top}\in\mathbb{R}^{2Nn}$,可将控制器(5)转换为另一形式:

$$\begin{aligned}U(t)\leqslant&-(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})E(t)-(\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})(\hat{\boldsymbol{L}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t)-\\&(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})(\hat{\boldsymbol{I}}\otimes\boldsymbol{I}_n)E(t),\end{aligned}\tag{23}$$

则有：

$$\begin{aligned}\|U(t)\|\leqslant&(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\|E(t)\|+(\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\|(\hat{\boldsymbol{L}}\otimes\boldsymbol{I}_n)\|\|E(t)\|+\\&(c+\varepsilon+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)})\|(\hat{\boldsymbol{I}}\otimes\boldsymbol{I}_n)\|\|E(t)\|\leqslant\\&[c(1+\|\hat{\boldsymbol{I}}\|)+\varepsilon(1+\|\hat{\boldsymbol{L}}\|+\|\hat{\boldsymbol{I}}\|)+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)}(1+\|\hat{\boldsymbol{L}}\|+\|\hat{\boldsymbol{I}}\|)]\|E(t)\|\leqslant\\&[c(1+\|\hat{\boldsymbol{I}}\|)+\varepsilon(1+\|\hat{\boldsymbol{L}}\|+\|\hat{\boldsymbol{I}}\|)+\mathrm{d}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)}(1+\|\hat{\boldsymbol{L}}\|+\|\hat{\boldsymbol{I}}\|)]\times\\&\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})}{\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{P}})}}\gamma(t)^{-1}\exp^{-\frac{\sigma(t-t_0)}{2}}\|E(t_0)\|,\end{aligned}\tag{24}$$

注意到$\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)}=\frac{a}{\hat{T}_P}\gamma(t)^{\frac{1}{a}}$，$0<\gamma(t)^{-1}\leqslant 1$，$0<\gamma(t)^{\frac{1}{a}-1}\leqslant 1$，$0<\exp^{-\frac{\sigma(t-t_0)}{2}}\leqslant 1$，则有：

$$\|U(t)\|\leqslant[c(1+\|\hat{\boldsymbol{I}}\|)+(\varepsilon+\mathrm{d}\frac{a}{\hat{T}_P})(1+\|\hat{\boldsymbol{L}}\|+\|\hat{\boldsymbol{I}}\|)]\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})}{\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{P}})}}\|E(t_0)\|.\tag{25}$$

这意味着控制器在$[t_0,t_1)$上一致有界．对于$t\in[t_1,\infty)$，由$E(t)\equiv\boldsymbol{0}$可得$U(t)\equiv\boldsymbol{0}$，这表明控制输入$U(t)$在区间$[t_1,\infty)$上也是一致有界的．因此可得，$U(t)$在区间$[t_0,\infty)$上一致有界，证毕．

**注** 1 值得注意的是，两层网络(1)的层内拓扑结构不必是强连通的，这意味着即使存在孤立节点，两层网络(1)也可在定理 1 的条件下实现预定时间层内同步．

**注** 2 若两层网络(1)的层内拓扑结构是无向的，由$\bar{\boldsymbol{L}}$的定义可知，此时$\bar{\boldsymbol{L}}$是一个对称矩阵，且满足行和为 1，即$\bar{\boldsymbol{L}}1_{2N}=1_{2N}$，等式两边同时左乘$\bar{\boldsymbol{L}}^{-1}$，得$\bar{\boldsymbol{L}}^{-1}\bar{\boldsymbol{L}}1_{2N}=\bar{\boldsymbol{L}}^{-1}1_{2N}=1_{2N}$，则$(\hat{p}_1,\hat{p}_2,\cdots,\hat{p}_{2N})^{\top}=(\bar{\boldsymbol{L}}^{\top})^{-1}1_{2N}=\bar{\boldsymbol{L}}^{-1}1_{2N}=1_{2N}$，即$\hat{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{I}_{2N}$，根据$\hat{\boldsymbol{Q}}$的定义，可知$\hat{\boldsymbol{Q}}=\hat{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{L}}+\bar{\boldsymbol{L}}^{\top}\hat{\boldsymbol{P}}=2\bar{\boldsymbol{L}}=2(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{I}}+\boldsymbol{I}_{2N})=2(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{I}})+2\boldsymbol{I}_{2N}$，再根据引理3可得$\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{Q}})=\lambda_{\min}(2(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{I}})+2\boldsymbol{I}_{2N})=2\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{I}})+2$，因此，可以得到以下推论1.

**推论** 1 设假设 1 和假设 2 成立，且两层网络(1)每层的层内拓扑结构是无向的，若下面两个不等式成立：

$$(c+\varepsilon)-\max\{\varphi,\psi\}>0,\tag{26}$$

$$d\geqslant 1.\tag{27}$$

则两层网络(1)在控制器(5)的作用下可在预定时间$\hat{T}_P$内实现预定时间层内同步，且同步状态在$[t_0+\hat{T}_P,\infty)$保持不变．

## 4　数值仿真

本节通过图 1 所示的两层异构网络来验证理论推导结果的正确性．第一层节点的动力学如下：

$$f_1(\omega(t))=\begin{cases}\frac{1}{2}(|\omega_1(t)+1|-|\omega_1(t)-1|)\\\frac{1}{2}(|\omega_2(t)+1|-|\omega_2(t)-1|)\\\frac{1}{2}(|\omega_3(t)+1|-|\omega_3(t)-1|),\end{cases}\tag{28}$$

这里$\omega(t)=(\omega_1(t),\omega_2(t),\omega_3(t))^{\top}$表示系统的状态向量．

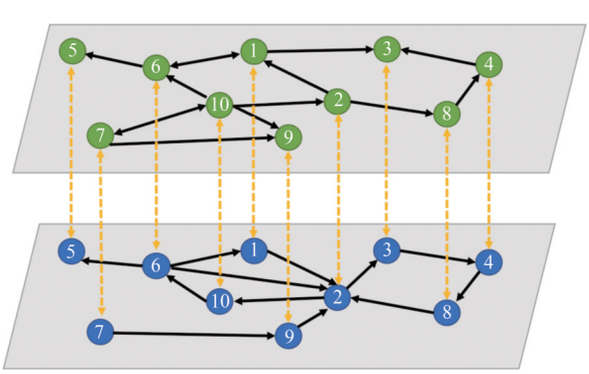



图 1　两层网络示意图

Fig. 1　Schematic diagram of the duplex network

第二层节点的动力学由 Chua's 电路系统描述：

$$f_2(\hat{\omega}(t))=\begin{bmatrix}-\alpha & \alpha & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -\beta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\omega}_1(t)\\ \hat{\omega}_2(t)\\ \hat{\omega}_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\alpha F(\hat{\omega}_1(t))\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\tag{29}$$

这里$\hat{\omega}(t)=(\hat{\omega}_1(t),\hat{\omega}_2(t),\hat{\omega}_3(t))^{\top}$表示系统的状态向量，$\alpha=2.8$，$\beta=3.1$，$F(\omega_1(t))=\mu\omega_1(t)+\frac{\nu-\mu}{2}(|\omega_1(t)+1|-|\omega_1(t)-1|)$，$\mu=-0.73$，$\nu=-1.34$.

对于$\forall\bar{x}(t),\bar{y}(t)\in\mathbb{R}^3$，有：

$$\begin{aligned}(\bar{x}(t)-\bar{y}(t))^{\top}(f_1(\bar{x}(t))-f_1(\bar{y}(t)))\leqslant&(\bar{x}_1(t)-\bar{y}_1(t))^{\top}(\bar{x}_1(t)-\bar{y}_1(t))+\\&(\bar{x}_2(t)-\bar{y}_2(t))^{\top}(\bar{x}_2(t)-\bar{y}_2(t))+\\&(\bar{x}_3(t)-\bar{y}_3(t))^{\top}(\bar{x}_3(t)-\bar{y}_3(t))=\\&(\bar{x}(t)-\bar{y}(t))^{\top}(\bar{x}(t)-\bar{y}(t)),\end{aligned}\tag{30}$$

则可取$\varphi=1$.设$\bar{A}=\begin{bmatrix}-\alpha & \alpha & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -\beta & 0\end{bmatrix}$，$g(\hat{x}(t))=\begin{bmatrix}-\alpha F(\hat{x}_1)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$，对于$\forall\hat{x}(t),\hat{y}(t)\in\mathbb{R}^3$，可得：

$$\begin{aligned}(\hat{x}(t)-\hat{y}(t))^{\top}(f_2(\hat{x}(t))-f_2(\hat{y}(t)))=&(\hat{x}(t)-\hat{y}(t))^{\top}\bar{A}(\hat{x}(t)-\hat{y}(t))+\\&(\hat{x}(t)-\hat{y}(t))^{\top}(g(\hat{x}(t))-g(\hat{y}(t)))\leqslant\\&\frac{1}{2}(\hat{x}(t)-\hat{y}(t))^{\top}(\bar{A}+\bar{A}^{\top})(\hat{x}(t)-\hat{y}(t))+\\&|\alpha v|(\hat{x}_1(t)-\hat{y}_1(t))^{\top}(\hat{x}_1(t)-\hat{y}_1(t))\leqslant\\&\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\hat{A}+\hat{A}^{\top})(\hat{x}(t)-\hat{y}(t))^{\top}(\hat{x}(t)-\hat{y}(t)),\end{aligned}\tag{31}$$

这里$\hat{A}=\bar{A}+\mathrm{diag}(|\alpha v|,0,0)$，故可取$\psi=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\hat{A}+\hat{A}^{\top})=2.26$.经计算，可得$\lambda_{\min}(\hat{\boldsymbol{Q}})=1.8257$，$\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{P}})=2.2838$. 设$c=2.5$，$\varepsilon=3.2$，$d=2.6$，此时(10)式和(11)式成立，设(2)式中$a=3$，预定时间$\hat{T}_P=1$s，两层网络中所有节点的初始状态都从[0,2]中随机选择.图2和图3分别表示两层网络每层的同步误差分量随时间的变化曲线，可以看出，两层网络在控制器(5)的作用下，能在预定时间$\hat{T}_P=1$s内实现同步，并在此后保持同步状态.定义网络的同步总误差为$E(t)=\frac{1}{2N}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\|x_i^1(t)-s_1(t)\|^2+\sum_{i=1}^{N}\|x_i^2(t)-s_2(t)\|^2}\right)$.为了讨论不同初值和控制参数对网络同步的影响，令$X_{01}$，$X_{02}$和$X_{03}$分别表示初值在[0,2]，[−5,5]和[6,7]中随机选择，图4展示了预定时间和控制参数固定，初值分别为$X_{01}$，$X_{02}$和$X_{03}$时网络同步总误差的变化曲线，图5描绘了初值和预定时间固定，分别取$\varepsilon=3.5$，$\varepsilon=6$和$\varepsilon=8.5$时网络同步总误差的变化，结果表明，网络同步总误差在预定时间$\hat{T}_P=1$s内收敛至零，且收敛时间不依赖于初始值和控制参数.最后，在相同的初值和控制参数条件下，分别选取$\hat{T}_P=0.5$ s和$\hat{T}_P=1.5$ s两种不同的预定时间进行对比，如图6所示，同步现象可在任意指定时间内实现.

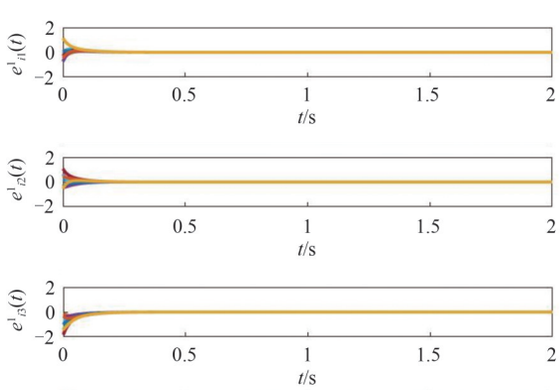



图2 第一层的同步误差分量的变化轨迹

Fig. 2 The variation trajectory of the synchronous error component in the first layer

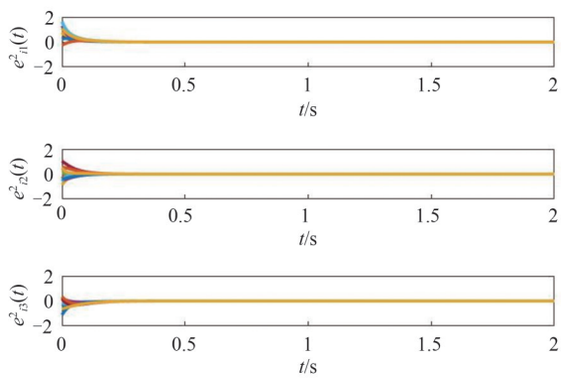



图3 第二层的同步误差分量的变化轨迹

Fig. 3 The variation trajectory of the synchronous error component in the second layer

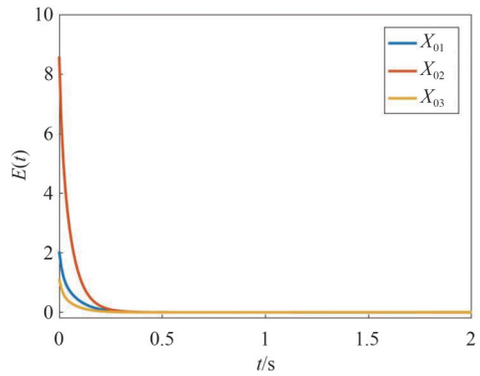



图4　三种不同初值下同步总误差的变化轨迹

Fig. 4　Evolution of total synchronization error with three different initial values

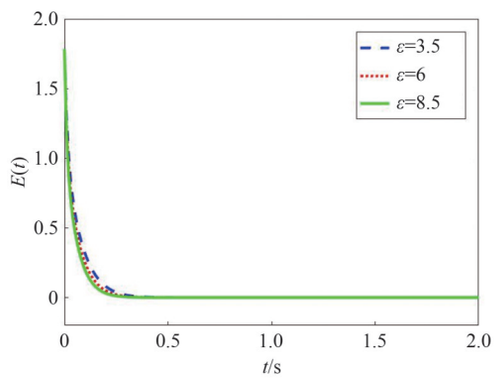



图5　三种不同控制参数下同步总误差的变化轨迹

Fig. 5　Evolution of total synchronization error with three different control parameters

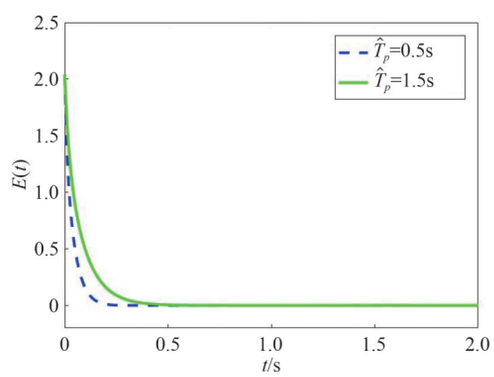



图6　两种不同预定时间下同步总误差的变化轨迹

Fig. 6　Evolution of total synchronization error with two different prescribed-time

## 5　结论

本文研究了多层网络预定时间层内同步问题，基于Lyapunov稳定性理论、不等式放缩技术和*M*-矩阵的性质，得到了多层网络预定时间同步准则，丰富了多层网络预定时间同步理论，最后通过数值仿真验证了提出的理论的有效性．结合实际应用需求，未来研究将重点关注牵制控制下多层网络预定时间同步问题．

## 参　考　文　献

[1] Chen W H, Liu Y, Zheng W X. Synchronization analysis of two-time-scale nonlinear complex networks with time-scale-dependent coupling [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 49(9): 3255-3267.

[2] Tang J, Wang Y, Liu F. Characterizing traffic time series based on complex network theory [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2013, 392(18): 4192-4201.

[3] Summers T H, Cortesi F L, Lygeros J. On submodularity and controllability in complex dynamical networks [J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2015, 3(1): 91-101.

[4] Li W, Tang S, Fang W, et al. How multiple social networks affect user awareness: The information diffusion process in multiplex networks [J]. Physical Review E, 2015, 92(4): 042810.

[5] Liu H, Li J, Zhao J, et al. Pinning control of multiplex dynamical networks using spectral graph theory [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2024, 54(9): 5309-5322.

[6] Ning D, Wu X, Liu J, et al. Leader-following pinning synchronization of multiagent systems with impulsive interlayer coupling [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2020, 67(12): 5162-5174.

[7] Khalaf A J M, Alsaadi F E, Alsaadi F E, et al. Synchronization in a multiplex network of gene oscillators [J]. Physics Letters A, 2019, 383(31): 125919.

[8] Xu Y, Wu X, Wan X, et al. Finite-time quasi-synchronization of stochastic multilayer networks with energy consumption estimation [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2021, 69(4): 2121-2125.

[9] Sun S, Wei X, Zhang H, et al. Finite-time pinning synchronization control for multi-layer complex networks [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2024, 34(13): 9153-9165.

[10] Song C, Zhou J, Wang J. Finite time inter-layer synchronization of duplex networks *via* event-dependent intermittent control [J]. IEEE Transactions on Circuits

and Systems II: Express Briefs, 2022, 69(12): 4889-4893.

[11] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 57(8): 2106-2110.

[12] Wang Y, Song Y, Hill D J, et al. Prescribed-time consensus and containment control of networked multiagent systems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 49(4): 1138-1147.

[13] Chen J, Li X, Wu X, et al. Prescribed-time synchronization of complex dynamical networks with and without time-varying delays [J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2022, 9(6): 4017-4027.

[14] Mao B, Wu X, Liu H, et al. Adaptive fuzzy tracking control with global prescribed-time prescribed performance for uncertain strict-feedback nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2024, 54(9): 5217-5230.

[15] Zhang J, Lu J, Qiu J, et al. Prescribed-time synchronization of complex networks with switching partial information transmission [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2024, 71(5): 2724-2728.

[16] Tang Q, Qu S, Zhang C, et al. Effects of impulse on prescribed-time synchronization of switching complex networks [J]. Neural Networks, 2024, 174: 106248.

[17] Li Z, Wen G, Duan Z, et al. Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 60(4): 1152-1157.

[18] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

(责编 曹东,校对 雷建云)