doi:10.12068/j.issn.1005－3026.2026.20269025

忆阻耦合异质HNN的同步分析及电路实现

常 辉，张双婷，李玉霞，韩宝兴
（山东科技大学 电气与自动化工程学院，山东 青岛 266590）

摘 要：针对神经网络在初始条件失配和神经元突触权重异质性分布时难以实现同步控制的问题，本文构建了基于忆阻器耦合的异质性突触权重HNN（Hopfield neural network）模型(以下简称忆阻耦合异质HNN)，实现了同步调控．首先，数值分析发现该网络随着突触权重的变化呈现出倍周期分岔、边界危机等多种动态转换模式，表明利用突触权重可以调节神经网络的动力学行为．其次，研究发现忆阻器耦合强度可以动态调节忆阻器的能量补偿，引发异质性突触权重的神经元（简称异质神经元）的同步行为，从而实现异质神经元之间的信息传递和协同处理．最后，硬件电路实验验证了该耦合网络的同步行为．这项工作有助于深化对耦合异质神经元网络同步的理解和认识．

关 键 词：忆阻器；Hopfield神经网络；异质性突触权重；同步控制；电路实现
中图分类号：TP 183 **文献标志码**：A **文章编号**：1005-3026(2026)07-0030-10

Synchronization Analysis and Circuit Implementation of Memristor-Coupled Heterogeneous HNN

CHANG Hui, *ZHANG Shuang-ting*, *LI Yu-xia*, *HAN Bao-xing*
(College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China. Corresponding author: LI Yu-xia, E-mail: yuxiali2004@sdust.edu.cn)

Abstract: To address the problem that synchronization control is difficult to achieve for neural networks under mismatched initial conditions and heterogeneous distribution of neuronal synaptic weights, a memristor-coupled Hopfield neural network (HNN) model with heterogeneous synaptic weights was constructed in this paper, and synchronous regulation was realized. First, numerical analysis found that the network exhibited multiple dynamic transition modes with the variation of synaptic weights, such as period-doubling bifurcations and boundary crises, indicating that the dynamic behaviors of the neural network could be regulated by tuning synaptic weights. Second, it was found that the energy compensation of the memristor could be dynamically adjusted by the memristor coupling strength, realizing the synchronization behavior of neurons with heterogeneous synaptic weights (heterogeneous neurons for short), thereby achieving information transmission and cooperative processing among heterogeneous neurons. Finally, the synchronization behavior of the coupled network was verified by hardware circuit experiments. This work contributes to deepening the understanding and cognition of the synchronization of coupled heterogeneous neural networks.

Key words: memristor; Hopfield neural network; heterogeneous synaptic weights; synchronization control; circuit implementation

忆阻器凭借其独特的非线性特性，能够有效地模拟突触或神经元的电磁感应，在神经网络理论及应用中得到广泛关注[1]．例如，利用忆阻器可以构建耦合Hindmarsh-Rose（HR）神经元[2]、耦合HNN[3]以及耦合Morris-Lecar（ML）神经元[4]等．近年来，局部有源忆阻器及其构建的非线性系统呈现出丰富动力学行为和仿生特性[5]．在局部有源忆阻器的耦合FitzHugh-Nagumo（FHN）神经

收稿日期：2026-03-24
基金项目：国家自然科学基金资助项目（62473238）；山东省自然科学基金资助项目（ZR2021MF116）．
作者简介：常 辉（1978—），男，山东菏泽人，山东科技大学讲师，博士．
通信作者：李玉霞，E-mail：yuxiali2004@sdust.edu.cn.

元和HR神经元中,发现了多种吸引子共存和状态跃迁现象[6].在分数阶局部有源忆阻系统中,发现了双稳态和混沌等复杂动力学行为[7].在局部有源忆阻器构建的耦合神经元系统中,发现了电磁辐射强度增强可诱发超混沌吸引子[8].尽管局部有源忆阻混沌系统的动力学研究已成为热点,但基于此类忆阻器模型的耦合神经网络设计与分析仍值得进一步探索.

HNN结构简单、动力学丰富,作为分析类脑动态行为的重要模型,持续得到学术界和工业界的广泛关注[9].作为大脑和神经系统的基本单元,神经元的放电活动可通过构建动力学模型进行探索和分析[10].在HNN中,神经元的激活函数有助于网络捕捉学习数据中的非线性关系,增强其在处理复杂分类和识别任务中的性能和效率[11].忆阻突触在HNN中可作为自突触或互连突触,能够触发系统产生复杂的动力学行为.例如,在双忆阻循环HNN模型中,发现了混沌和超混沌行为[12].在忆阻突触耦合的四维HNN模型中,观察到依赖于初始状态的吸引子[13].此外,对双忆阻突触耦合HNN的探索,还发现了周期极限环和稳定点吸引子等动态行为[14].因此,忆阻耦合神经网络的相关研究,对探索忆阻器在系统动力学行为中的作用具有一定的价值.

神经同步作为忆阻耦合神经网络中的关键动力学行为,表现为不同神经元的放电活动在时间维度上的一致性.神经同步包括相位同步、频率同步或完全同步等多种模式,其在信息整合、认知功能中具有重要作用.基于不同拓扑结构及耦合的神经网络模型及其同步性研究受到广泛关注,取得了系列研究成果[15-17].在忆阻耦合神经网络的同步研究中,忆阻器初始条件失配是常见扰动因素.已有研究表明,系统的这种失配仍可通过参数调控实现同步.例如,由2个相同单神经元构成的忆阻耦合系统,在忆阻器初始条件失配的情况下,实现了并联偏置同步[15].对于含有3个忆阻器的九维耦合网络,采用降维分析方法发现了忆阻器初始条件对同步的影响机制[16].在离散时间忆阻器耦合神经元模型中,忆阻器初始状态可以诱导同步转变[17].上述研究表明,通过调参可以实现忆阻耦合系统同步.这种同步的实现往往需要满足多维临界条件.例如,耦合强度需超过特定阈值,才能使神经元电活动从独立振荡转为协同同步[18];忆阻器的开关比、滞回宽度需与神经元的放电特性匹配,否则可能破坏同步[19];神经元的固有参数需保持一定程度的一致性,参数异质性过大将导致同步无法实现[20].特别对异质神经元,其耦合系统面临初始条件失配和参数不同,它们的系统同步调控具有一定的难度,这也是笔者开展研究的出发点.

基于局部有源忆阻器可以放大信号、实现能量转换和动态调控的特性,本文设计了1种由2个突触权重异质性分布的子网络构成的耦合HNN模型,实现了同步调控.与现有忆阻突触耦合HNN或异质HNN相比,本文构建的网络模型在突触权重异质性分布、同步调控及鲁棒分析方面存在一定的差别.现有研究多集中于同构网络或突触权重异质性较小的网络,而本文系统在神经元突触权重异质性分布和初始状态不匹配的情况下,通过调节耦合强度,实现了协同放电.

本文通过对忆阻能量及耦合强度的系统分析,揭示了忆阻耦合机制在克服子系统内禀差异、驱动异质系统实现动态一致性方面的独特作用,为理解大脑中非对称结构的功能整合提供了具有可行性的理论模型.

1　忆阻器模型的构建

基于广义压控型忆阻理论,提出了局部有源忆阻器模型,其数学描述如下:

$$\left.\begin{aligned} i &= G(x)v=(a\,\mathrm{sgn}(x+1)-b\,\mathrm{sgn}(x-1)-cx)v,\\ \dot{x} &= g(x,v)=2-x^2+v. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中:$G(x)$为忆阻器的忆导函数;$g(x,v)$为忆阻器的状态演化函数;sgn(·)为符号函数;v为外部电压激励;i为通过忆阻器的电流信号;x为忆阻器内部的状态变量;a,b,c为忆阻器内部参数.

1.1　忆阻特性分析

为验证模型的忆阻特性,将其参数配置为a=1,b=1,c=1,并施加振幅A=3 V的正弦电压激励$v=A\sin(2\pi ft)$.当激励频率f分别取2,4,10 Hz时,进行数值仿真,其伏安特性曲线如图1a所示,呈现典型磁滞回线,且环形曲线面积随频率增加而减小,验证了模型构建的合理性.

为了分析该忆阻器的局部有源性,构建其直流伏安(DC V–I)特性曲线.首先,使忆阻状态处于准静态(即令$\dot{x}$=0),此时,扫描忆阻状态为X,可得对应点的端电压V及直流电流I.利用实验数据点可绘制忆阻器的直流特征曲线(图1b~1d).根据非线性理论,DC V–I曲线的负斜率区域为忆阻器的局部有源域,对应2段为红色曲线,非局部

有源域为蓝色曲线(图1d),其具体分布详见表1.这意味着忆阻器在特定工作点等效于负电阻,对信号具有增强作用,能够模拟神经元的电磁感应.

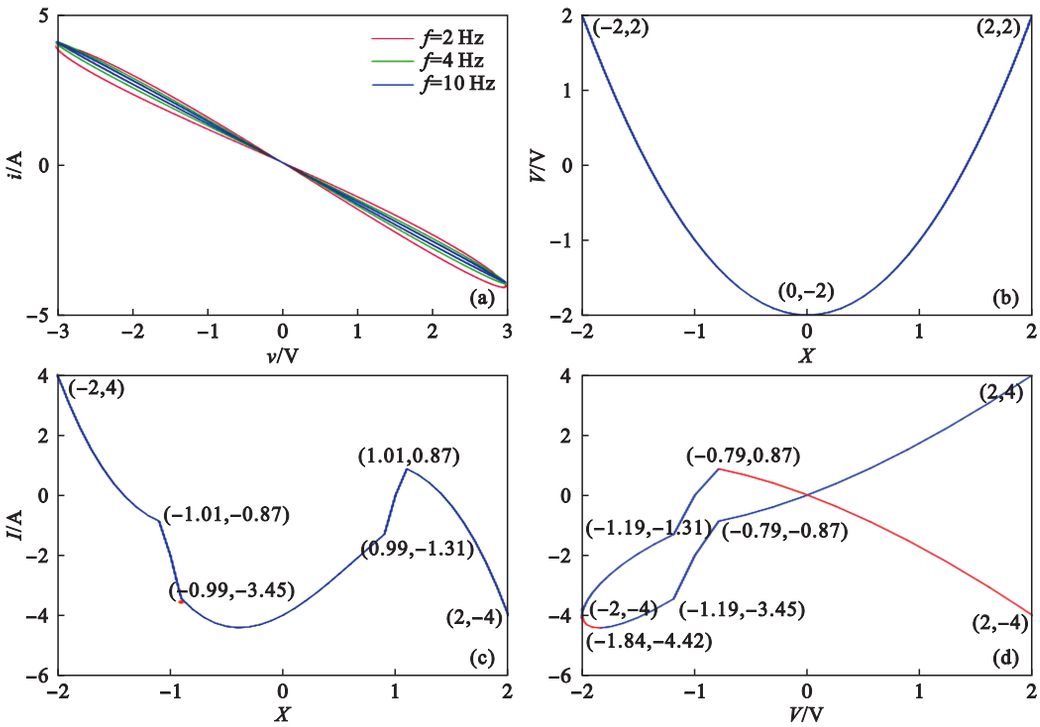


图1 忆阻器的动态行为

Fig. 1 Dynamic behavior of memristor

(a)—伏安曲线;(b)—DC X–V图;(c)—DC X–I图;(d)—DC V–I图.

表1 忆阻器局部有源区域分布

Table 1 Distribution of locally active regions of memristor

X	V/V	I/A	斜率	忆阻器特性
(−2. 00,−1. 01)	(−0. 79,2. 00)	(−0. 87,4. 00)	+	局部无源
(−1. 01,−0. 99)	(−1. 19,−0. 79)	(−3. 45,−0. 87)	+	局部无源
(−0. 99,−0. 37)	(−1. 84,−1. 19)	(−4. 42,−3. 45)	+	局部无源
(−0. 37,0. 00)	(−2. 00,−1. 84)	(−4. 42,−4. 00)	−	局部有源
(0. 00,0. 99)	(−2. 00,−1. 19)	(−4. 00,−1. 31)	+	局部无源
(0. 99,1. 01)	(−1. 19,−0. 79)	(−1. 31,0. 87)	+	局部无源
(1. 01,2. 00)	(−0. 79,2. 00)	(−4. 00,0. 87)	−	局部有源

1.2 忆阻仿真器构建

基于模型(1),采用Multisim软件平台,构建了忆阻仿真器.该仿真器主要由反相放大器、乘法器及电阻构成,其电路拓扑如图2a所示,其输入为正弦交流电压信号,其输出对应忆阻器内部电流.基于基尔霍夫定律,忆阻器可等价描述为

$$\left.\begin{aligned} RC\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2\frac{R}{R_1}-\frac{R}{R_2}x^2+\frac{R}{R_3}v,\\ i &= \left[\frac{R_4}{R_5}\mathrm{sgn}(x+1)-\frac{R_4}{R_6}\mathrm{sgn}(x-1)-\frac{R_4}{R_7}x\right]v. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

其中:R和C分别为电阻和电容.

为了验证其性能,根据忆阻器内部参数a=b=c=1,配置R=10 kΩ和C=10 nF,元件C_1,R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_5,R_6,R_7,R_8,R_9,R_{10},R_{11}的具体取值均标注于图2a中.当施加振幅A=3 V、频率f=4 Hz的正弦电压信号时,可得到v–i特性曲线(图2b).这为典型磁滞回线,与理论预期一致,验证了忆阻仿真器设计的正确性.

2 忆阻耦合HNN及平衡点分析

2.1 耦合HNN的构建

作为基础理论模型,HNN能够模拟类脑神经网络的动力学特性[21],其动力学方程可以描述如下:

$$C_i\dot{x}_i=-\frac{x_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\tanh(x_j)+I_i,(i,j\in\mathbf{N}^*). \quad (3)$$

其中:x_i, C_i和R_i分别表示第i神经元的膜电位、电

容和电阻;w_{ij}和I_i表示第i突触的权重和外偏置电流;tanh(·)表示神经元激活函数.

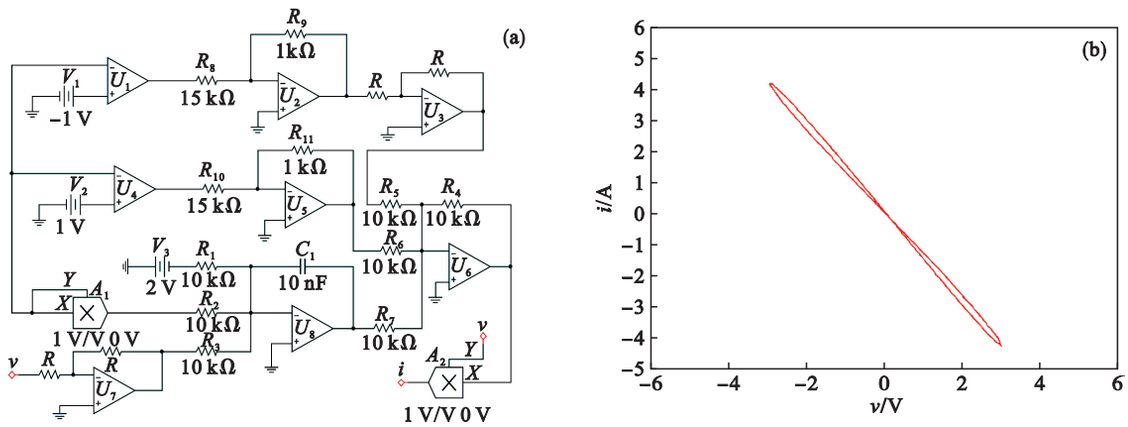


图2　忆阻仿真器及其验证

Fig. 2　Memristor emulator and its verification

(a)—忆阻器仿真电路;(b)—忆阻器伏安曲线仿真结果.

大脑各功能区的密集连接与耦合可以实现复杂神经动力学行为.为了探索2个不同头侧区域子网络可能存在的相互作用,本文采用局部有源忆阻器模拟生物突触,构建忆阻耦合神经网络(图3为示意图).该系统在参数C_i=1,R_i=1及突触权重w_{ij}不同的情况下,其动力学方程可描述如下:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1&=-x_1+2\tanh(x_1)+2\tanh(x_2)-0.5\tanh(x_3)+kG(x_7)(x_1-x_4),\\
\dot{x}_2&=-x_2+0.2\tanh(x_1)-3.5\tanh(x_2)+0.6\tanh(x_3),\\
\dot{x}_3&=-x_3+0.5\tanh(x_1)-4\tanh(x_2)+1.8\tanh(x_3),\\
\dot{x}_4&=-x_4+2\tanh(x_4)-0.8\tanh(x_5)+0.7\tanh(x_6)-kG(x_7)(x_1-x_4),\\
\dot{x}_5&=-x_5+w_{54}\tanh(x_4)+3\tanh(x_5)+1.2\tanh(x_6),\\
\dot{x}_6&=-x_6-2.5\tanh(x_4)+1.2\tanh(x_5)+2.6\tanh(x_6),\\
\dot{x}_7&=2-x_7^{\,2}+x_1-x_4.
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

其中:w_{54}为突触权重;$G(x)=a\,\mathrm{sgn}(x+1)-b\,\mathrm{sgn}(x-1)-cx$;$k$为耦合强度.

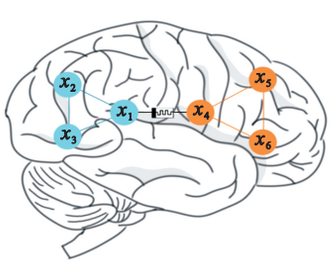


图3　神经网络耦合系统结构示意图

Fig. 3　Schematic diagram of neural network coupled system structure

由于2个子网络的突触权重w_{ij}不同,它们固有动力学存在明显差异;采用局部有源忆阻器作为耦合突触,模拟不同功能区的非对称连接,实现双向动态信息交互.这种方式构建的忆阻耦合异质HNN模型与已有文献(文献[22-24])在异质性和子网络维度方面存在明显不同,具体如表2所示.这表明该模型较已有模型更难以实现同步.

表2　模型差异度对比

Table 2　Comparison of model differences

模型	子网络	子网络维数	模型总维数
模型[22]	同构	1	3
模型[23]	同构	3	7
模型[24]	异构	2	5
本文模型	同构,异质	3	7

2.2　平衡点分析

非线性系统的动力学特性依赖于平衡点的稳定性.为分析系统的局部行为,首先确定其平衡点.令方程组(4)等号左侧为零,得到平衡点满足的关系式:

$$\left.\begin{aligned}
0&=-x_1+2\tanh(x_1)+2\tanh(x_2)-0.5\tanh(x_3)+kG(x_7)(x_1-x_4),\\
0&=-x_2+0.2\tanh(x_1)-3.5\tanh(x_2)+0.6\tanh(x_3),\\
0&=-x_3+0.5\tanh(x_1)-4\tanh(x_2)+1.8\tanh(x_3),\\
0&=-x_4+2\tanh(x_4)-0.8\tanh(x_5)+0.7\tanh(x_6)-kG(x_7)(x_1-x_4),\\
0&=-x_5+w_{54}\tanh(x_4)+3\tanh(x_5)+1.2\tanh(x_6),\\
0&=-x_6-2.5\tanh(x_4)+1.2\tanh(x_5)+2.6\tanh(x_6),\\
0&=2-x_7^{\,2}+x_1-x_4.
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

当参数 $a=b=c=1, k=1, w_{54}=4.7$ 时，计算可得系统平衡点：$E_1=(0,0,0,0,0,0,\sqrt{2})$，$E_2=(0,0,0,0,0,0,-\sqrt{2})$. 系统的雅可比矩阵可表示为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} -1+2S(x_1)+\alpha & 2S(x_2) & -0.5S(x_3) & -\alpha & 0 & 0 & (x_1-x_4)\beta \\ 0.2S(x_1) & -1-S(x_2) & 0.6S(x_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5S(x_1) & -4S(x_2) & -1-1.8S(x_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & -1+S(x_4)+\alpha & -0.8S(x_5) & 0.7S(x_6) & (x_4-x_1)\beta \\ 0 & 0 & 0 & 4.7S(x_4) & -1+3S(x_5) & 1.2S(x_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5S(x_4) & 1.2S(x_5) & -1-2.6S(x_6) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2x_7 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

其中：$\alpha=\delta(x_7+1)-\delta(x_7-1)-x_7$；$\beta=2\delta(x_7+1)-2\delta(x_7-1)-1$，$\delta(\cdot)$为狄拉克函数；$S(x)=\mathrm{sech}^2 x$.

平衡点 E_1 对应特征根 $\lambda_1=-2.828\ 4$，$\lambda_2=-4.074\ 4$，$\lambda_3=2.953\ 9$，$\lambda_4=0.363\ 6+1.864\ 8\mathrm{i}$，$\lambda_5=0.363\ 6-1.864\ 8\mathrm{i}$，$\lambda_6=-0.700\ 0$，$\lambda_7=0.164\ 8$. 平衡点 E_2 对应的特征根为 $\lambda_1=-2.828\ 4$，$\lambda_2=-4.039\ 1$，$\lambda_3=0.345\ 6$，$\lambda_4=1.182\ 4+1.867\ 3\mathrm{i}$，$\lambda_5=1.182\ 4-1.867\ 3\mathrm{i}$，$\lambda_6=3.028\ 5+0.259\ 1\mathrm{i}$，$\lambda_7=3.028\ 5-0.259\ 1\mathrm{i}$. 根据稳定性判据，平衡点 E_1 与 E_2 均为不稳定鞍焦点，这表明系统满足混沌存在的必要条件.

3 动力学行为及同步分析

本章将从突触权重与耦合强度两方面系统地分析二者对网络系统动力学行为及其同步性的影响.

3.1 突触权重对网络动力学行为的调控分析

本节仅以突触权重 w_{54} 为例，探究通过对突触权重的调控，实现网络在周期态、混沌态之间的演化和切换. 参数 a,b,c 的值仍取为 1，初始条件设置为 $(x_1(0),x_2(0),x_3(0),x_4(0),x_5(0),x_6(0),x_7(0))=(0,0.1,0,0,0,0,0)$. 以权重 w_{54} 为控制参数，数值计算可得系统的分岔图(图 4a)与李雅普诺夫指数谱(LES)(图 4b 呈现前 2 个李雅普诺夫指数(LE)). 分岔图分析发现，在区间[4.0, 6.5]中，当突触权重 w_{54} 逐渐增强时，系统发生倍周期分岔、逆向倍周期分岔、边界危机等复杂动力学行为. 系统由单周期态(图 5a)，经倍周期分岔进入 2 周期(图 5b)、4 周期(图 5c)，并在 w_{54}=4.40 时呈现 3 周期(图 5d)，这意味着系统混沌窗的开启. 随着突触权重 w_{54} 的增大，系统出现多种动态的混沌吸引子(图 5e、图 5f). 同时，观察图 4a 可以发现，系统经边界危机发生周期混沌状态切换(如 $w_{54}=4.81$)及不同周期状态切换(如在 $w_{54}=4.25, 5.58, 6.15$ 时)等现象. 实验结果表明，可以通过调节突触权重 w_{54} 实现对系统动态行为的调控.

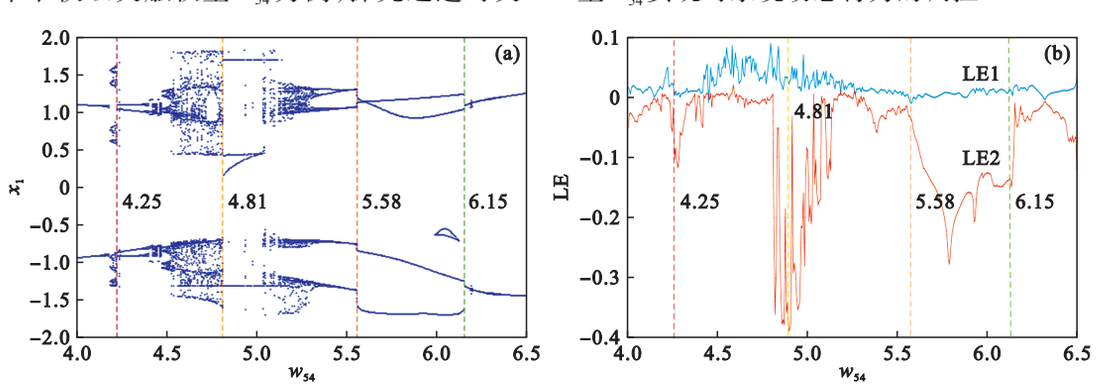


图 4 突触权重 $w_{54}\in[4.0,6.5]$ 诱导的耦合异质 HNN 的动力学演化

Fig. 4 Dynamic evolution of coupled heterogeneous HNN induced by synaptic weight $w_{54}\in[4.0,6.5]$

(a)—分岔图；(b)—LES.

进一步地数值实验发现，初始条件对系统的动力学行为具有同样的调控作用. 当突触权重 w_{54} 取特定值时，其他参数保持不变，改变初始条件，可以观察到系统在混沌态、周期态、准周期态之间跃迁(图 6). 如在 w_{54}=5.25 时，调控初始分量 $x_1(0)$ 可以实现系统混沌态、周期态共存(图 6a)；在 w_{54}=5.40 时，调控初始分量可实现多环交织的 2 周期与 1 周期共存(图 6b)；在 w_{54}=6.20 时，调控初始分量可实现周期态、准周期态共存(图 6c). 细致分析发现系统虽同为单周期态，但相轨的空间分布、振荡模式等仍存在明显差异. 这表明实现系统的精细化行为，需要对系统突触权重和初

始状态进行协同调控.

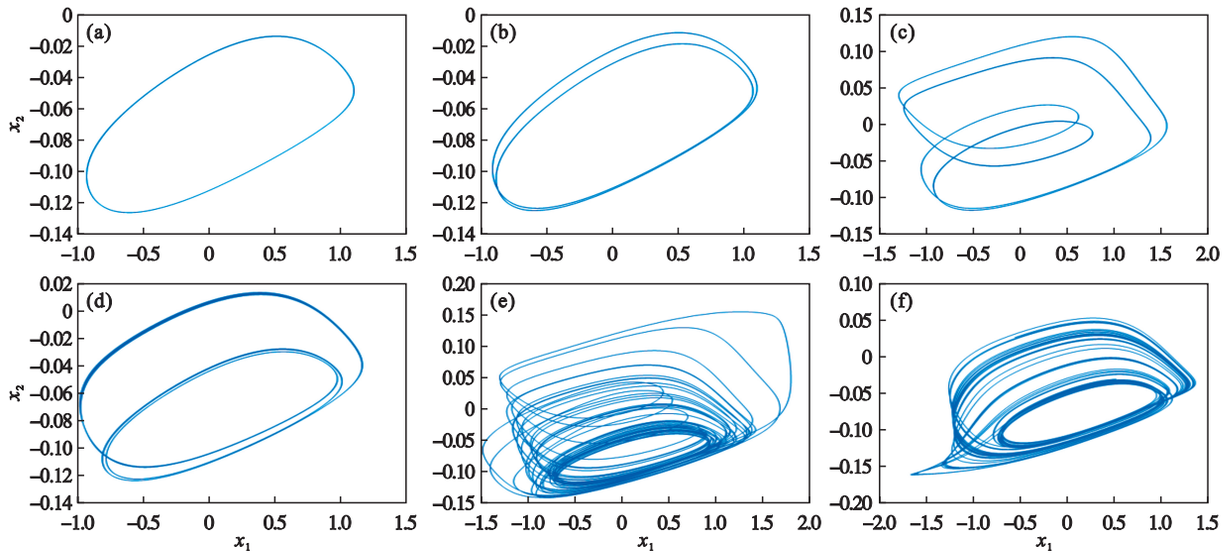


图5　不同突触权重w_{54}下的系统典型相轨图

Fig. 5　Typical phase trajectories of system under different synaptic weights w_{54}

(a)—w_{54}=4.00;(b)—w_{54}=4.16;(c)—w_{54}=4.19;(d)—w_{54}=4.40;(e)—w_{54}=4.70;(f)—w_{54}=5.20.

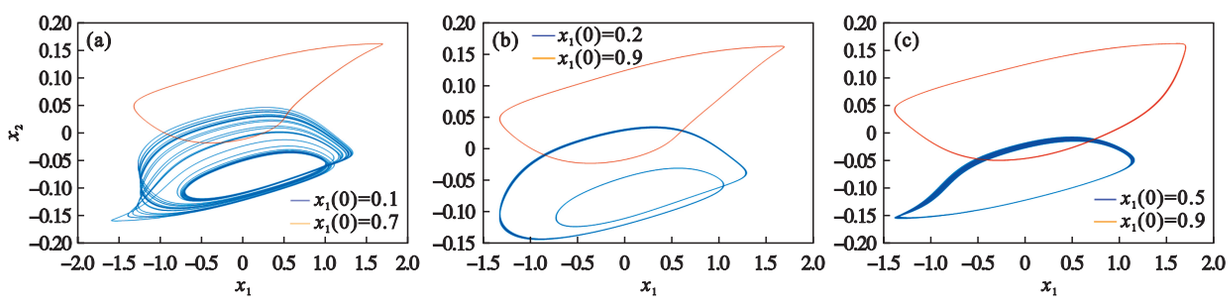


图6　突触权重w_{54}取特定值时,初始分量调控对系统动力学行为的影响

Fig. 6　Effects of regulation of initial components on dynamic behaviors of system with a specific synaptic weight w_{54}

(a)—w_{54}=5.25;(b)—w_{54}=5.40;(c)—w_{54}=6.20.

3.2　耦合强度对网络同步的调控分析

忆阻器能够模拟生物神经元突触的连接强度,其非线性特性可在神经信息传递中发挥类似增益调节的作用,为网络同步的调控提供了物理基础.通过调节忆阻耦合强度,可实现对耦合神经网络同步动力学的调控,从而模拟不同子神经网络的信息协同.在本文忆阻耦合异质HNN模型中,2个子网络因突触权重矩阵的不同,对输入电流产生不同增益,这阻碍二者实现完全同步.然而,由忆阻器耦合的神经元膜电压x_1和x_4构成关键调控通道,借助忆阻器独特的能量吸收与释放功能,该通路可以动态调节流经其间的能量,实现对2个神经元放电活动及其各自子系统能量的补偿性供给与调节,最终影响整个网络的同步状态.为研究这一机制,下面选择忆阻耦合的神经元膜电压x_1和x_4作为核心研究对象:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=-x_1+2\tanh(x_1)+2\tanh(x_2)-0.5\tanh(x_3)+kG(x_7)(x_1-x_4),\\ \dot{x}_4&=-x_4+2\tanh(x_4)-0.8\tanh(x_5)+0.7\tanh(x_6)-kG(x_7)(x_1-x_4).\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

同步误差设为$e=x_1-x_4$,则$\dot{e}=\dot{x}_1-\dot{x}_4=(2kG(x_7)-1)(x_1-x_4)+\theta$,其中$\theta=2\tanh(x_1)+2\tanh(x_2)-0.5\tanh(x_3)-2\tanh(x_4)+0.8\tanh(x_5)-0.7\tanh(x_6)$.定义李雅普诺夫函数为

$$W=\frac{1}{2}e^2.\tag{8}$$

则有

$$\dot{W}=e\dot{e}=(2kG(x_7)-1)(x_1-x_4)^2+\theta(x_1-x_4).\tag{9}$$

根据李雅普诺夫稳定性定理,当$\dot{W}$为负值时,系统是渐近稳定的.由式(7)可知,影响系统同步的2种因素:一是控制项(忆阻突触的耦合强度).它是1个可调节的参数,为了确保$\dot{W}$为负,可

以调节 k,使得$(2kG(x_7)-1)$小于零,且绝对值足够大.二是扰动项(θ项),包含2个子系统的其他状态变量,代表了2个子系统自身内部动力学差异对同步误差产生的影响.所以系统实现同步的必要条件是,由忆阻耦合产生的负反馈效应必须足够强大,以克服或抵消由内部动力学差异所引起的非同步趋势.

由于$|\tanh(\cdot)|<1$,对θ各项取绝对值并缩放,可得

$$|\theta|\leqslant|2\tanh(x_1)|+|2\tanh(x_2)|+|0.5\tanh(x_3)|+|2\tanh(x_4)|+|0.8\tanh(x_5)|+|0.7\tanh(x_6)|. \tag{10}$$

化简可得

$$|\theta|<2+2+0.5+2+0.8+0.7=8. \tag{11}$$

利用基本不等式:$\theta e\leqslant\frac{1}{2}\alpha e^2+\frac{1}{2\alpha}\theta^2,\alpha>0$,代入式(9),化简整理可得

$$\dot{V}\leqslant\left(2kG(x_7)-1+\frac{\alpha}{2}\right)e^2+\frac{1}{2\alpha}\theta^2. \tag{12}$$

取$\alpha=-2(2kG(x_7)-1)>0$,则有

$$\dot{V}\leqslant\frac{\theta^2}{-4(2kG(x_7)-1)}. \tag{13}$$

利用有界性$|\theta|<8$,可得

$$\dot{V}\leqslant\frac{64}{-4(2kG(x_7)-1)}=\frac{16}{-(2kG(x_7)-1)}. \tag{14}$$

所以当$2kG(x_7)-1>0$时,$\dot{V}$有负上界,当$\dot{V}$为负值时,意味着同步误差e会收敛到零,最终x_1,x_4实现同步.

为了验证上述理论分析,下面采用数值仿真,探究忆阻器耦合强度k对网络同步的调控作用.初始条件设置不变,在耦合强度$k\in[1,10]$范围内,数值计算可得神经元膜电位x_1和x_4的分岔图(图7),其中$k\in[1.00,1.06]$时的局部放大图嵌入图7中.该局部放大图表明,当k较小时,其对2个权重异质性分布子HNN的内部动力学行为影响都较小,各个子网络按照其各自的动态运行(即理论分析中的扰动项θ影响显著),神经元x_1和x_4分别处于不同模式的混沌放电状态.如k=1时,各子网络处于不同混沌状态.随着k值逐渐增大,系统开始出现周期窗口.当k=1.03时,系统完全进入周期态,随后随着k值的增大,忆阻耦合的调节作用逐渐增强,2个神经元的膜电位分岔图趋近,表明它们的放电行为开始趋于同步.因此,增强耦合强度k,可使$(2kG(x_7)-1)$项成为主导,有效抑制内部差异θ的影响,驱动系统实现同步.

上述稳定性分析验证了忆阻器对系统同步的调控作用.为了从物理层面量化忆阻突触对网络的同步调控机制,定义忆阻器能量函数H_m:

$$H_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}L_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}^2=\frac{1}{2}x_7I_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}x_7G(x_7)(x_1-x_4). \tag{15}$$

式中:L_{m}为电感;I_{m}为通过忆阻器的感应电流.

该函数表征了忆阻器作为场能存储与交换媒介的瞬时状态.数值计算发现,耦合强度k通过影响忆阻器的能量变化,实现对系统网络同步的调控(图8).当耦合强度k较小时(图8a),神经元膜电位x_1和x_4呈现异步的混沌放电,此时H_{m}呈现混沌振荡,表明2个子HNN之间进行频繁能量交换与再分配,以抵消突触权重的异质性分布触发的非同步行为.随着k的增大,忆阻器的调控作用增强,系统开始向周期放电状态转换.与此对应,H_{m}的波动幅度显著衰减(图8b).当k=10时(图8c),能量函数$H_{\mathrm{m}}\to0$,2个神经元动态行为趋于一致,实现同步放电.这表明忆阻突触中存储的场能已基本释放完毕,此时忆阻器不再作为能量交换的媒介,2个子网络间能量流动趋于零,信息交互终止.这标志着2个子网络达到了能量平衡与同步,忆阻突触实现了神经元的同步调节.

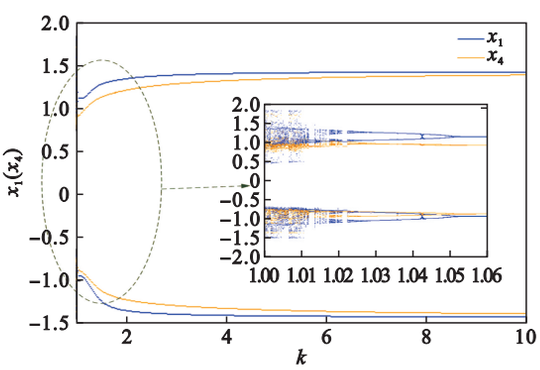


图7 当 $k\in[1,10]$时,网络系统的分岔图

Fig. 7 Bifurcation diagram of network system for $k\in[1,10]$

$H_{\mathrm{m}}\to0$的状态恰与李雅普诺夫函数$\dot{V}<0$且$e\to0$的渐近稳定条件相对应,这表明,忆阻能量趋于零的过程,正是李雅普诺夫意义下系统趋于同步的物理实现.因此,能量函数H_{m}的分析不仅补充了同步的判据,更深化了对忆阻耦合神经网络稳定性的物理理解,证实了忆阻器在神经元同步中的调控作用.

上述实验表明,即使2个子网络突触权重矩阵不同、初始值不完全匹配,由忆阻器直接相连的对应神经元仍能实现同步.这类似于大脑不同

功能区域的神经元,虽存在结构差异,却依然能够实现高效的功能协同.

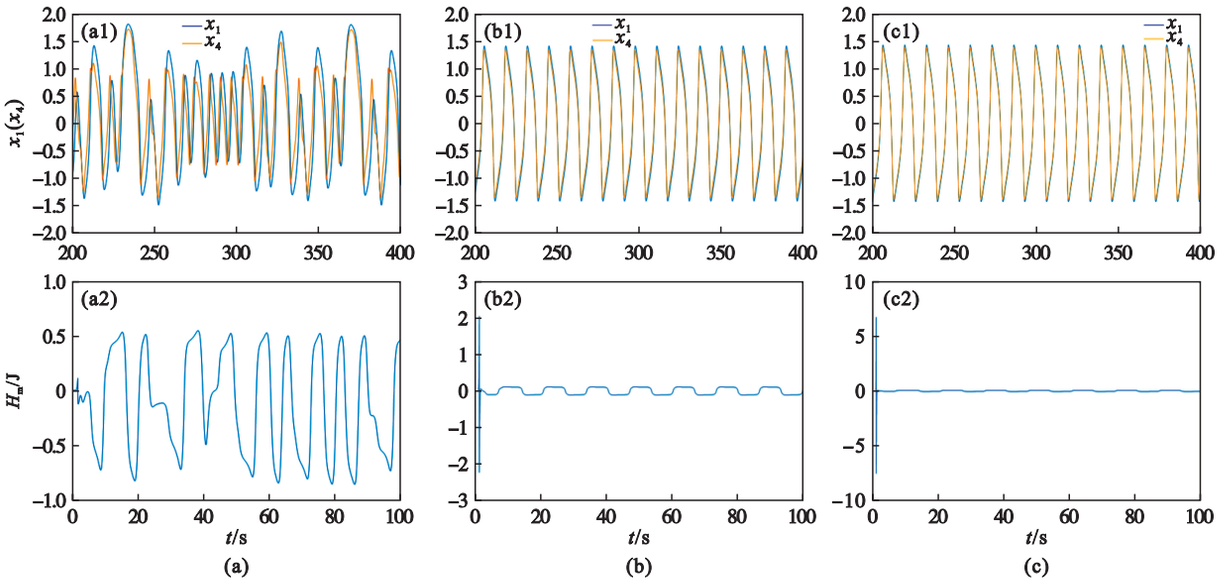


图8　耦合强度 k 诱导系统实现同步的演化过程及忆阻能量 H_m 变化

Fig. 8　Evolution process of system achieving synchronization induced by coupling strength k and variation of memristive energy H_m

(a)—k=1;(b)—k=5;(c)—k=10.

4　电路设计与实验

为验证所提出网络系统的同步行为,基于Multisim平台构建了相应的模拟电路(图9a),其状态方程可表述为

$$\left.\begin{aligned}
RC\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}&=-v_1+\frac{R}{R_1}\tanh(v_1)+\frac{R}{R_2}\tanh(v_2)-\frac{R}{R_3}\tanh(v_3)+\frac{R}{R_k}G(v_7)(v_1-v_4),\\
RC\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}&=-v_2+\frac{R}{R_4}\tanh(v_1)-\frac{R}{R_5}\tanh(v_2)+\frac{R}{R_6}\tanh(v_3),\\
RC\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}&=-v_3+\frac{R}{R_7}\tanh(v_1)-\frac{R}{R_8}\tanh(v_2)+\frac{R}{R_9}\tanh(v_3),\\
RC\frac{\mathrm{d}v_4}{\mathrm{d}t}&=-v_4+\frac{R}{R_{10}}\tanh(v_4)-\frac{R}{R_{11}}\tanh(v_5)+\frac{R}{R_{12}}\tanh(v_6)-\frac{R}{R_k}G(v_7)(v_1-v_4),\\
RC\frac{\mathrm{d}v_5}{\mathrm{d}t}&=-v_5+\frac{R}{R_{13}}\tanh(v_4)+\frac{R}{R_{14}}\tanh(v_5)+\frac{R}{R_{15}}\tanh(v_6),\\
RC\frac{\mathrm{d}v_6}{\mathrm{d}t}&=-v_6-\frac{R}{R_{16}}\tanh(v_4)+\frac{R}{R_{17}}\tanh(v_5)+\frac{R}{R_{18}}\tanh(v_6),\\
RC\frac{\mathrm{d}v_7}{\mathrm{d}t}&=2-{v_7}^2+v_1-v_4.
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

其中:RC 是积分时间常数;v_1~v_7 7个积分电路的电容电压值分别对应于系统方程式(4)中 x_1~x_7,对应耦合参数通过 R/R_i 实现.那么将时间常数 RC 设置为 0.1 ms,R=10 kΩ 和 C=10 nF,相应电阻阻值为 R_1=5 kΩ,R_2=5 kΩ,R_3=20 kΩ,R_4=50 kΩ,R_5=2.86 kΩ,R_6=16.67 kΩ,R_7=20 kΩ,R_8=2.5 kΩ,R_9=5.56 kΩ,R_{10}=5 kΩ,R_{11}=12.5 kΩ,R_{12}=14.29 kΩ,R_{13}=2.13 kΩ,R_{14}=3.34 kΩ,R_{15}=8.33 kΩ,R_{16}=3.85 kΩ,R_{17}=8.35 kΩ,R_{18}=3.85 kΩ.在耦合强度 k=1 时,相应的 R_k 为 10 kΩ,耦合强度 k=10 时 R_k 为 1 kΩ.

基于图9a所示的电路原理图,设计制作网络系统的印刷电路板(PCB),并手工焊接硬件电路,搭建系统实物测试的实验平台,如图9b所示.其硬件电路采用的乘法器和放大器的型号分别为 AD633JN 和 TL082CP,采用±15 V 直流电源供电.通过调节耦合强度(由 R_k 的调节实现),实现对硬件电路的调控.示波器通道 CH1 测量子网络1神经元 x_1 的电压波形,通道 CH2 测量子网络2

神经元x_4的电压波形,时基为1 ms/div,电压档位为0.5 V/div,实验测试结果(图10)表明网络可以物理实现同步行为,这与数值和理论分析结果一致.

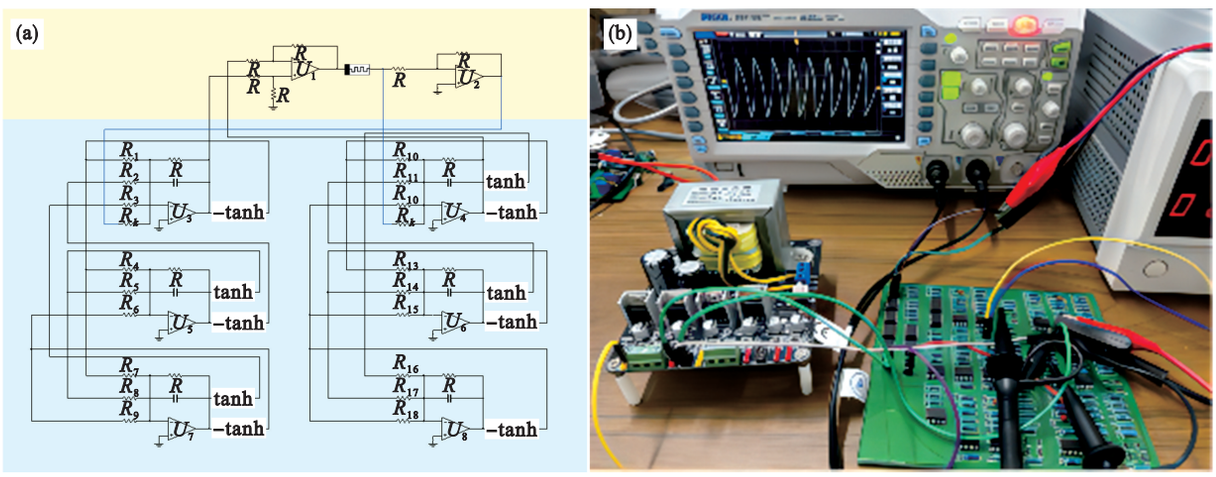


图9 网络系统电路原理图及相应测试平台的配置

Fig. 9 Circuit schematic diagram of network system and configuration of corresponding test platform

(a)—电路原理图;(b)—系统实物测试的整体配置.

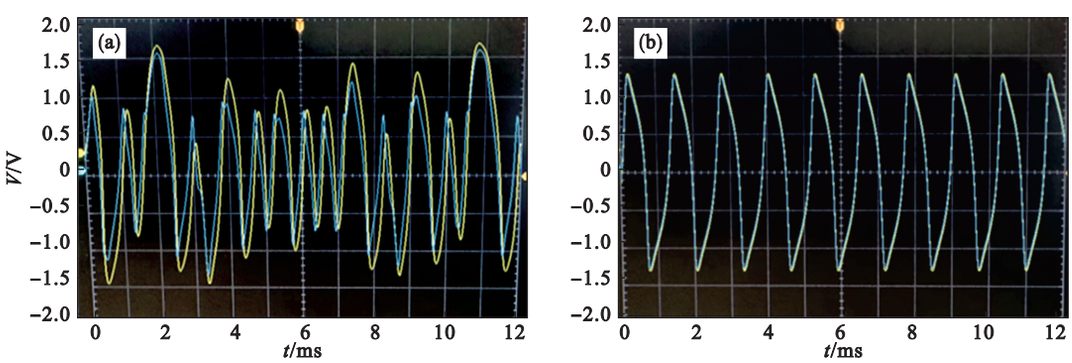


图10 调控耦合强度,实现网络系统的同步

Fig. 10 Synchronization of network system achieved by regulating coupling strength

(a)—R_k=10 kΩ;(b)—R_k=1 kΩ.

5 结 语

本文基于局部有源忆阻器,构建了1种新型忆阻耦合异质HNN模型,实现了异质子网络的同步.研究发现,网络动力学的调控可以通过系统突触权重的调节来实现.同时,子网络的同步性与忆阻能量吸收和释放存在内在的关联,这为网络同步的调控提供了理论支持.特别是在耦合异质子网络同步性的分析中,耦合强度可以调控忆阻能量变化,实现同步.这表明忆阻突触既能诱发单个神经元放电,又能调控耦合网络神经元的同步行为.该工作为理解大脑不同功能区间的能量传递与信息整合提供了一个不同的视角依据.

参考文献:

[1] Chen Y X, Yang F F, Wang C N. Coherence resonance in a memristive map neuron and adaptive energy regulation[J]. *Modern Physics Letters B*, 2025, 39(17): 2550008.

[2] Bao H, Hu A H, Liu W B, et al. Hidden bursting firings and bifurcation mechanisms in memristive neuron model with threshold electromagnetic induction [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(2): 502-511.

[3] Lin H R, Wang C H, Cui L, et al. Brain-like initial-boosted hyperchaos and application in biomedical image encryption [J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2022, 18(12): 8839-8850.

[4] Wu K J, Huang Z X, Yan M J. Dynamic behavior of memristor ML neurons and its application in secure communication [J]. *The European Physical Journal B*, 2024, 97(7): 97.

[5] Mao Y D, Dong Y J, Lu Z Z, et al. Second-order locally active memristor based neuronal circuit[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2025, 195: 116279.

[6] Mou J, Cao H Z, Zhou N R, et al. An FHN-HR neuron network coupled with a novel locally active memristor and its DSP implementation [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2024, 54(12): 7333-7342.

[7] Yu Y J, Bao H, Shi M, et al. Complex dynamical behaviors of a fractional-order system based on a locally

active memristor[J]. *Complexity*, 2019, 2019: 2051053.

[8] Lai Q, Yang L. Hyperchaos of neuron under local active discrete memristor simulating electromagnetic radiation[J]. *Chaos*(*An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*), 2024, 34(1): 013145.

[9] Bao H, Hua M J, Ma J, et al. Offset-control plane coexisting behaviors in two-memristor-based Hopfield neural network [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2023, 70(10): 10526−10535.

[10] Zhu K L, Wang Y, Yang F F. A functional neuron with a linear membrane [J]. *The European Physical Journal Special Topics*, 2026, 234(28): 8209−8218.

[11] Wang C H, Liang J H, Deng Q L. Dynamics of heterogeneous Hopfield neural network with adaptive activation function based on memristor [J]. *Neural Networks*, 2024, 178: 106408.

[12] Bao H, Chen Z G, Ma J, et al. Planar homogeneous coexisting hyperchaos in bi-memristor cyclic Hopfield neural network [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2024, 71(12): 16398−16408.

[13] 陈墨, 陈成杰, 包伯成, 等. 忆阻突触耦合Hopfield神经网络的初值敏感动力学[J]. 电子与信息学报, 2020, 42(4): 870−877.
(Chen Mo, Chen Cheng-jie, Bao Bo-cheng, et al. Initial sensitive dynamics in memristor synapse-coupled Hopfield neural network [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2020, 42(4): 870−877.)

[14] Ding S K, Wang N, Bao H, et al. Memristor synapse-coupled piecewise-linear simplified Hopfield neural network: dynamics analysis and circuit implementation[J]. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, 2023, 166: 112899.

[15] Hua M J, Zhang Y Z, Chen M, et al. Memristive single-neuron model and its memristor-coupled network: homogenously coexisting attractors and parallel-offset synchronization [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2022, 32(15): 2250225.

[16] Zhang Y Z, Liu Z, Wu H G, et al. Dimensionality reduction analysis for detecting initial effects on synchronization of memristor-coupled system [J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 109689−109698.

[17] Li K X, Bao B C, Ma J, et al. Synchronization transitions in a discrete memristor-coupled bi-neuron model [J]. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, 2022, 165: 112861.

[18] Min F H, Chen C J, Broderick N G R. Coupled homogeneous Hopfield neural networks: simplest model design, synchronization, and multiplierless circuit implementation[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2025, 36(6): 11632−11639.

[19] Xu Y, Jia Y, Ma J, et al. Synchronization between neurons coupled by memristor [J]. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, 2017, 104: 435−442.

[20] Lu J Q, Cao J D. Synchronization-based approach for parameters identification in delayed chaotic neural networks [J]. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, 2007, 382(2): 672−682.

[21] Lin H R, Wang C H, Hong Q H, et al. A multi-stable memristor and its application in a neural network[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*: *Express Briefs*, 2020, 67(12): 3472−3476.

[22] Bao B C, Hu J T, Bao H, et al. Memristor-coupled dual-neuron mapping model: initials-induced coexisting firing patterns and synchronization activities [J]. *Cognitive Neurodynamics*, 2024, 18(2): 539−555.

[23] Chen C J, Bao H, Zhang Y Z, et al. Synchronization and coupling dynamics in memristive homogeneous and heterogeneous Hopfield neural networks [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*: *Regular Papers*, 2025, 72(9): 4854−4867.

[24] Wang M J, Peng J W, He S B, et al. Phase synchronization and dynamic behavior of a novel small heterogeneous coupled network[J]. *Fractal and Fractional*, 2023, 7(11): 818.