饱和黏土中锚杆预应力长期松弛的分数阶本构模型及关键参数影响研究

刘泰玉[1,2],罗东雨[1,2],蒋关希曦[3],孙铖[1,2,4,5*]

1.广西民族大学智能建造学院,广西 南宁 530006;
2.广西民族大学工程运维智能监测检测工程技术研究中心,广西 南宁 530006;
3.南京工业大学数理科学学院,江苏 南京 211816;
4.哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院,黑龙江 哈尔滨 150001;
5.河北省双介质动力技术重点实验室,河北 邯郸 056000

摘 要:锚杆预应力的长期松弛是威胁矿山边坡、深基坑及地下工程稳定性和支护安全的关键问题之一。针对传统整数阶模型难以精确描述锚杆长期预应力松弛在饱和黏土中非线性时变行为的问题,基于分数阶微积分理论,构建了锚杆—饱和黏土耦合的应力松弛本构方程,并通过引入Riemann-Liouville分数阶导数与双参数Mittag-Leffler函数,从理论上刻画了材料的记忆效应与连续松弛特性。为实现模型参数的高精度识别,提出了一种自适应差分进化算法(AHDE)与Levenberg-Marquardt(L-M)算法耦合的策略。为验证模型的有效性,结合边坡工程锚杆监测数据进行了应用和参数识别。结果表明:所建模型能够高精度还原应力松弛全过程(R^2=0.9517),参数敏感性分析进一步明确了分数阶阶数和黏滞系数等关键参数的影响机制,为锚杆长期预应力松弛的理论分析和工程研究提供了系统方法和参考依据。

关键词:锚固系统;应力松弛模型;分数阶微积分;差分进化算法;参数识别

中图分类号:TU470 **文献标志码**:A **文章编号**:1005-2518(2026)04-0968-12 DOI:10.11872/j.issn.1005-2518.2026.04.333

引用格式:刘泰玉,罗东雨,蒋关希曦,等.饱和黏土中锚杆预应力长期松弛的分数阶本构模型及关键参数影响研究[J].黄金科学技术,2026,34(4):968-979.LIU Taiyu,LUO Dongyu,JIANG Guanxixi,et al.A Fractional Constitutive Model for Long-Term Relaxation of Anchor Pre-stress in Saturated Clay and Its Key Parameter Influence Analysis[J].Gold Science and Technology,2026,34(4):968-979.

锚杆作为矿山及岩土工程中重要的围岩加固和支护手段,被广泛应用于地下采场、巷道、边坡及隧道等工程中。通过施加预应力,锚杆能够有效改善围岩受力结构,显著提升岩体整体稳定性和承载能力,在矿山安全生产和深部资源开采过程中发挥着关键作用(康红谱等,2015;杜贝举等,2020;李娟娟等,2025;刘小虎等,2025)。然而,工程实践表明,锚杆在长期服役过程中普遍存在预应力衰减现象。尤其在饱和黏土等软弱地层中,孔隙水压力变化和材料时变特性使得应力松弛呈现明显的非线性与时变特征,对结构稳定性及工程耐久性构成潜在威胁(宋洋等,2021;孙世国等,2022;张焕雄等,2025)。

在试验和监测方面,针对锚杆预应力长期松弛问题的研究已取得较为丰富的成果。通过对大型

收稿日期:2025-11-13;**修订日期**:2026-03-27

基金项目:国家自然科学基金青年基金项目"长期荷载与混凝土脱空缺陷共同影响的钢管混凝土桁式柱抗震性能研究"(编号:52508175)、"变波速非均匀介质中SH波散射问题研究"(编号:12002182)和广西民族大学科研基金资助项目"局部地形对地震动影响效应的研究"(编号:2021KJQD24)联合资助

作者简介:刘泰玉(1989—),男,山东济南人,讲师,从事结构工程与边坡稳定性研究工作。E-mail:20195041@gxmzu.edu.cn

*通信作者:孙铖(1992—),男,吉林白山人,讲师,博士(后),从事岩土力学和边坡稳定性研究工作。E-mail:suncheng007@126.com

© Editorial Department of *Gold Science and Technology* (CC BY-NC-ND)

基坑及矿山工程的长期原位监测,揭示了锚杆应力随时间衰减的典型规律及其阶段性特征(李厚恩等,2007);室内拉拔和界面剪切试验结果表明,锚杆材料性质、加载条件和环境变化对松弛速率具有显著影响(李国维等,2020;陈昌富等,2021);多尺度试验研究进一步刻画了锚—土(岩)界面黏结滑移与应力传递的演化过程(Zhu et al,2022)。相关成果为认识锚杆长期承载性能及建立预应力衰减模型提供了重要的试验依据。这些试验研究为锚杆长期性能分析提供了基础数据。然而,仅凭试验难以全面揭示应力松弛的内在机理及其非线性特征。为此,研究人员逐步引入流变力学方法开展理论建模与机理分析。在理论建模方面,整数阶模型被广泛应用于描述锚杆的应力松弛特性(于怀昌等,2011a,2011b;田洪铭等,2013,2015;陈方明等,2017;王国富等,2018)。该类模型结构清晰、计算简便,能够较准确地反映材料的线性黏弹特性。然而,由于此类模型理论基础建立在线性假设之上,在刻画土体的非线性流变行为和松弛时效规律方面存在明显局限(于怀昌等,2019;许江等,2025)。为了更真实地反映土体的时变特征并弥补整数阶模型的不足,尝试引入分数阶微积分理论,以构建具有更广义表征能力的应力松弛模型,从而提高对土体长期力学响应的描述精度。近年来,分数阶微积分理论因在刻画材料非局部记忆效应和连续松弛特性方面的优势,在黏弹性材料及岩土力学研究中得到广泛应用(李涛等,2020;Cai et al,2024)。基于分数阶导数模型,可在统一数学框架下描述固体与流体性质的连续过渡,从而更精确地反映材料的黏滞性、记忆效应和时变行为(张春晓等,2018;汪明武等,2020)。已有研究表明,分数阶模型在岩土材料长期力学响应分析中表现优异,例如显著提升了凝灰岩、冻结黄土和红土应力松弛预测的计算精度(Ferrás et al,2023;许江等,2023;王宇等,2024;魏航等,2025)。然而,这些研究大多针对单一材料或单元尺度土体的松弛特性,对于锚杆—饱和黏土耦合体系的系统建模与定量分析仍相对不足,难以充分揭示复杂耦合作用下的长期力学行为。

针对上述问题,本文以饱和黏土中锚杆长期预应力损失作为研究对象,构建了基于分数阶微积分理论的锚杆—土体耦合应力松弛本构模型。该模型将锚杆简化为线弹性体,并采用分数阶广义Kelvin模型刻画饱和黏土的黏弹性行为;在参数识别方面,提出了自适应差分进化算法(AHDE)(张金鼎等,2025)与Levenberg-Marquardt(L-M)算法耦合的优化策略。本研究旨在为锚杆—土体耦合体系长期力学响应及非线性松弛特性的研究提供理论依据和分析工具。

1 分数阶应力松弛模型

1.1 锚固系统耦合模型

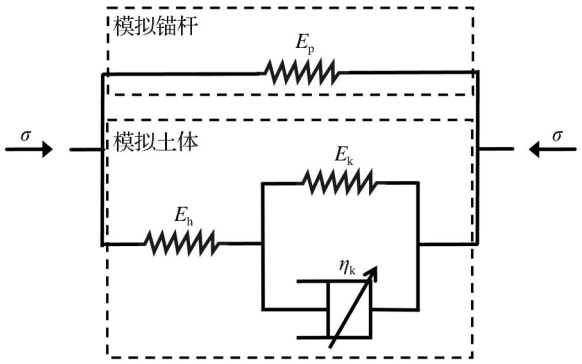
在耦合模型构建中,考虑到锚杆材料的刚度远大于周围土体,且在服役应力水平下其流变效应极小,故将其简化为线弹性体,通过线弹性弹簧单元进行等效表征。在土体本构模型选择方面,饱和黏土的应力松弛并非单一的指数衰减,而是具有明显的"记忆效应"和"阶段性趋稳"特征。相比Maxwell或Burgers模型,广义Kelvin模型的并联结构更符合预应力衰减后趋于稳定的工程实际;同时,通过引入分数阶黏壶元件,模型能够在参数数量较少的情况下较好地描述土体由瞬时弹性响应向长期流变行为演化的过程,在保证拟合精度的同时,减小参数之间的耦合影响,提高参数识别的稳定性。因此,本文采用分数阶广义Kelvin流变模型刻画饱和黏土的时变力学行为(图1)。鉴于本文关注的是锚固系统整体宏观应力松弛响应,而非局部微观结构效应,故在工程分析尺度上将土体近似视为各向同性均匀连续介质,以便建立可解析的理论模型。需要指出的是,该假设适用于结构性和方向性特征不显著的饱和黏土介质;当土体存在明显层理结构、各向异性固结特征或定向裂隙分布时,应采用各向异性本构模型进行修正。在此假设下,锚杆的弹性模量E_p表示为

$$E_p=\frac{E_a A_p}{A_r} \tag{1}$$

式中:E_a为锚杆实际弹性模量;A_p为截面面积;A_r为有效截面面积,为简化处理,本文选取整个试件截面面积作为有效面积进行计算。

引入(R-L)分数阶导数,Abel黏壶(Koeller,1984)表示为

$$\sigma(t)=\eta D_t^{\alpha}\varepsilon(t) \tag{2}$$



σ-应力；E_p-锚杆的弹性模量；E_h、E_k-土体中串与并联弹簧元件的弹性模量；η-黏壶的黏滞系数

图1 考虑预应力损失的耦合模型

Fig. 1 Coupled model considering prestress loss

式中：σ和ε分别为应力和应变；η为黏壶的黏滞系数；a为黏性阶数，满足$0\leqslant a\leqslant 1$，a的数值表征固体性质和流体性质的占比；D_t^a为分数阶算子。因此，分数阶广义Kelvin流变模型的本构关系为

$$\frac{\eta_k}{E_h+E_k}D_t^a\sigma_k+\sigma_k=\frac{E_hE_k}{E_h+E_k}\varepsilon_k+\frac{\eta_kE_h}{E_h+E_k}D_t^a\varepsilon_k \tag{3}$$

式中：E_h和E_k分别为土体中串联和并联弹簧元件的弹性模量；σ_k和ε_k分别为并联元件的应力和应变。特别地，当$a=0$时，黏壶退化为线弹性固体；当$a=1$时，分数阶模型退化为经典Kelvin模型。

为建立流变模型的本构方程，引入Laplace变换：

$$\begin{cases}\hat{f}(s)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\hat{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s\end{cases} \tag{4}$$

式中：$f(t)$为时域原函数；$\hat{f}(s)$为$f(t)$对应的Lapace像函数。对于分数阶的Lapace变换：

$$\begin{cases}L\left[D_t^af(t),s\right]=s^a\hat{f}(s),a\in[0,1]\\ L\left[D_t^{-a}f(t),s\right]=s^{-a}\hat{f}(s),a>0\end{cases} \tag{5}$$

另外，引入Mittag-Leffler函数：

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(-nt^{\alpha}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(k+j)!\left(-nt^{\alpha}\right)^j}{j!\ \Gamma[(k+j)\alpha+\beta]} \tag{6}$$

其Laplace变换为

$$L\left[t^{k\alpha+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(-nt^{\alpha}\right)\right]=\frac{k!\ s^{\alpha-\beta}}{\left(s^{\alpha}+n\right)^{k+1}}(\alpha>0,\beta>0) \tag{7}$$

设$k=0$，$\beta=a+1$，则Mittag-Leffler函数简化为

$$E_{\alpha,\alpha+1}^{(0)}\left(-nt^{\alpha}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-nt^{\alpha}\right)^j}{\Gamma(j\alpha+\alpha+1)} \tag{8}$$

其Laplace变换满足：

$$L\left[t^{\alpha}E_{\alpha,\beta}^{(0)}\left(-nt^{\alpha}\right)\right]=\frac{1}{\left(s^{\alpha}+n\right)s} \tag{9}$$

设$k=0$，$\beta=1$，Mittag-Leffler函数满足：

$$E_{\alpha,1}^{(0)}\left(-nt^{\alpha}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-nt^{\alpha}\right)^j}{\Gamma(j\alpha+1)} \tag{10}$$

其Laplace变换满足：

$$L\left[E_{\alpha,1}^{(0)}\left(-nt^{\alpha}\right)\right]=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+n}(\alpha>0,\beta>0) \tag{11}$$

1.2 锚固系统流变方程

该耦合模型为胡克体和分数阶广义Kelvin模型并联，满足：

$$\begin{cases}\sigma=\sigma_p+\sigma_k\\ \varepsilon=\varepsilon_p=\varepsilon_k\end{cases} \tag{12}$$

得出：

$$\sigma+\frac{\eta_k}{E_h+E_k}D_t^a\sigma=\left(\frac{E_hE_k+E_kE_p+E_hE_p}{E_h+E_k}\right)\varepsilon+\frac{E_h+E_p}{E_h+E_k}\eta_kD_t^a\varepsilon \tag{13}$$

为推导便利，上式简化为

$$\sigma+AD_t^a\sigma=B\varepsilon+CD_t^a\varepsilon \tag{14}$$

其中，

$$\begin{cases}A=\dfrac{\eta_k}{E_h+E_k}\\ B=\dfrac{E_hE_k+E_kE_p+E_hE_p}{E_h+E_k}\\ C=\dfrac{E_h+E_p}{E_h+E_k}\eta_k\end{cases} \tag{15}$$

因此，式(13)所示本构关系满足：

$$\sigma=\frac{B+CD_t^a}{1+AD_t^a}\varepsilon \tag{16}$$

为了将式(16)所示的分数阶微分方程转化为便于运算的代数方程，令$\varepsilon=\varepsilon_cH(t)$，代入式(16)，对其进行Laplace变化，整理得到：

$$\hat{\sigma}=\frac{B+Cs^{\alpha}}{1+As^{\alpha}}\cdot\frac{\varepsilon_c}{s} \tag{17}$$

为了得到式(17)的时变方程，将其参数项做下列变换

$$\frac{B+Cs^{\alpha}}{1+As^{\alpha}}\cdot\frac{1}{s}=\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{s\left(s^{\alpha}+1/A\right)}+\frac{C}{A}\cdot\frac{s^{\alpha}}{s\left(s^{\alpha}+1/A\right)} \tag{18}$$

结合式(9)和式(11)，得到：

$$\sigma(t)=\left[\begin{array}{l}\left(E_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{k}}E_{\mathrm{p}}+E_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{p}}\right)\dfrac{t^{\alpha}}{\eta_{\mathrm{k}}}E_{\alpha,\alpha+1}^{(0)}\left(-\dfrac{E_h+E_k}{\eta_k}t^{\alpha}\right)\\+\left(E_{\mathrm{h}}+E_{\mathrm{p}}\right)E_{\alpha,1}^{(0)}\left(-\dfrac{E_{\mathrm{h}}+E_{\mathrm{k}}}{\eta_{\mathrm{k}}}t^{\alpha}\right)\end{array}\right]\varepsilon_s \tag{19}$$

2 基于AHDE和L-M算法耦合方法的参数识别

针对分数阶松弛模型参数众多和目标函数非凸导致的识别困难,本文提出了一种AHDE与L-M算法耦合的优化策略,以实现全局搜索与局部精细优化的协同作用,从而提高复杂非线性松弛模型求解的稳定性和精度。其中,AHDE在标准差分进化算法(Differential Evolution,DE)基础上引入自适应参数机制和分种群变异策略,能够有效处理含分数阶导数的复杂非线性模型,完成土体参数的初步高精度识别。

AHDE的实现流程包括初始化种群、变异、交叉和选择4个核心步骤。其中,变异因子F和动态交叉因子CR分别控制搜索步长和收敛速度。传统标准差分进化算法(DE)通常采用固定参数,容易导致优化效率低下或陷入局部最优;AHDE通过自适应参数动态调整机制,依据个体适应度评分规则自动更新F和CR,从而显著提高全局搜索能力和收敛精度。具体评分规则如下:

$$Q_{i,N}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{f_{\mathrm{p}}-f_{i,N}}{f_{\mathrm{p}}-f_{\min}}}, f_{i,N}<f_{\mathrm{p}}\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{f_{\max}-f_{i,N}}{f_{\max}-f_{\mathrm{p}}}}, \text{其他}\end{cases} \tag{20}$$

式中:$f_{i,N}$为经过N次迭代后,个体i的适应度值;f_{p}为种群中所有个体的平均适应度值;$f_{\max}$和$f_{\min}$分别为当代种群适应度函数的最大值和最小值;$Q_{i,N}\in[0,1]$为N代种群中个体i的优劣度,其值越大表征个体越优。自适应的变异因子F和交叉因子CR可动态调整为

$$\begin{cases}F_{i,N}=F_{\max}-Q_{i,N}(F_{\max}-F_{\min})\\ CR_{i,N}=CR_{\max}-Q_{i,N}(CR_{\max}-CR_{\min})\end{cases} \tag{21}$$

式中:$F_{\max}$和$F_{\min}$为变异因子上下限;$CR_{\max}$和$CR_{\min}$为交叉因子上下限。当个体i的优劣度较高时,F与CR将减小,算法将在个体i附近寻找最优解;反之,若个体i的优劣度越低,说明最优解不在该个体附近,F和CR将增大,算法将通过全局寻求最优解。根据未成功更新次数的平均值$\bar{q}^{G}$和预设值Q_{tor}对比,完成完整识别过程。方法流程如图2所示。

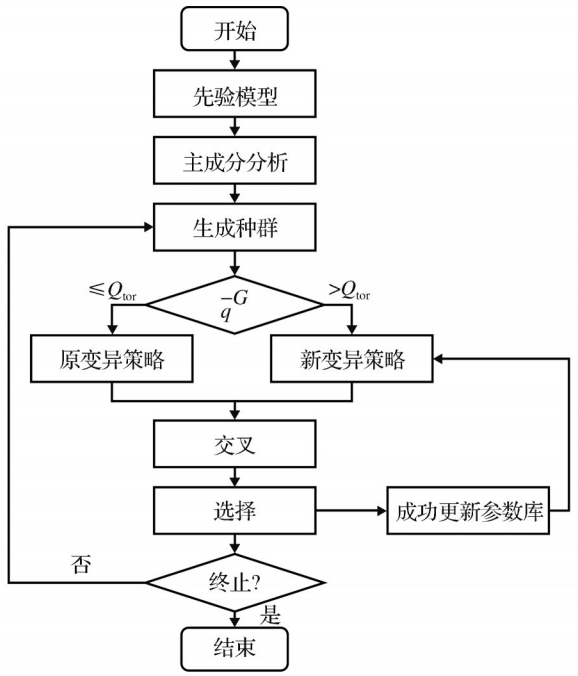


图2 自适应差分进化算法流程图

Fig. 2 Flowchart of the adaptive hybrid differential evolution(AHDE) algorithm

尽管自适应差分进化算法(AHDE)能够实现本构模型参数的高精度初步识别,但当模型包含更多非线性信息时,其求解精度可能受到限制。为进一步提高参数反演精度,将AHDE所得参数作为初始值,结合非线性Levenberg-Marquardt(L-M)算法进行局部优化,从而获得更为精确的参数估计。L-M算法流程如图3所示。

通过AHDE算法和L-M算法耦合,建立"全局搜索+局部精修"的优化策略,结合文献数据和工程现场锚杆应力时程监测数据,实现复杂参数的高效辨识,兼顾求解精度和收敛速度,为锚杆长期服役安全性评估提供理论工具。为全面验证该耦合策略的参数识别性能,本文将在第3节算例分析中,将其与单一L-M算法、最小二乘法(LS)、遗传算法(GA)和粒子群算法(PSO)进行系统对比,从拟合精度、收敛稳定性和残差分布等多个维度综合评价各

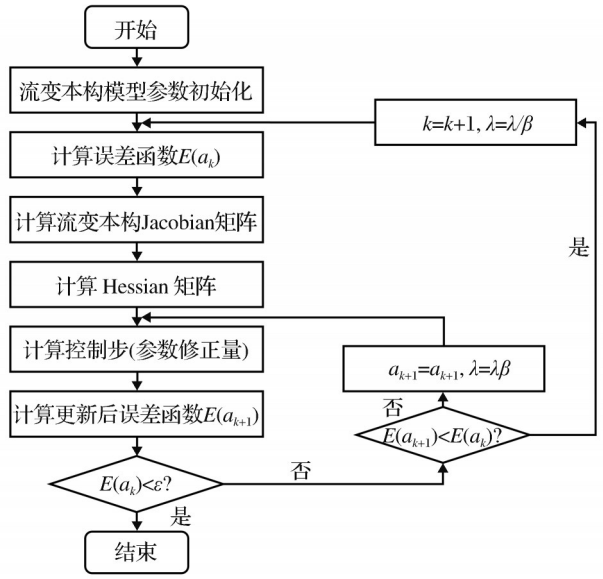


图3 L-M算法流程图

Fig. 3 Flowchart of the Levenberg-Marquardt(L-M) algorithm

算法的表现。

3 算例分析

3.1 基于对比文献数据的模型普适性验证

为检验本文所建分数阶本构模型在不同锚固介质和试验条件下的普适性和稳健性,引入宋洋等(2021)开展的锚杆—岩体耦合预应力损失试验数据作为对比验证案例。

宋洋等(2021)通过加锚节理岩体剪切蠕变试验,获取了锚杆预应力随时间演化的实测序列,并构建了基于普兰特体修正的广义Kelvin整数阶模型。该模型与本研究的主要差异在于:(1)支护介质由软弱黏土转为具有节理特征的岩体;(2)考虑了锚杆的弹塑性变形特性;(3)采用传统的整数阶本构框架。这种跨介质、跨维度的差异性为检验本文分数阶模型在复杂本构假设下的适应能力提供了理想的基准。需要特别说明的是,该试验数据具有典型的稀疏采样特征,整个试验周期内数据点有限,且测试环境可控、外界干扰较小。在这种条件下,若模型在有限样本下能够实现高精度拟合,表明其参数具有较强的可辨识性,具备良好的抗过拟合能力。

基于式(19)的分数阶应力松弛本构方程,本文采用AHDE-L-M耦合优化法、单一L-M算法和最小二乘法对宋洋等(2021)获得的2组典型试验工况(编号A-1和B-2)的预应力损失数据进行参数辨识与拟合。拟合结果如表1和图4所示。

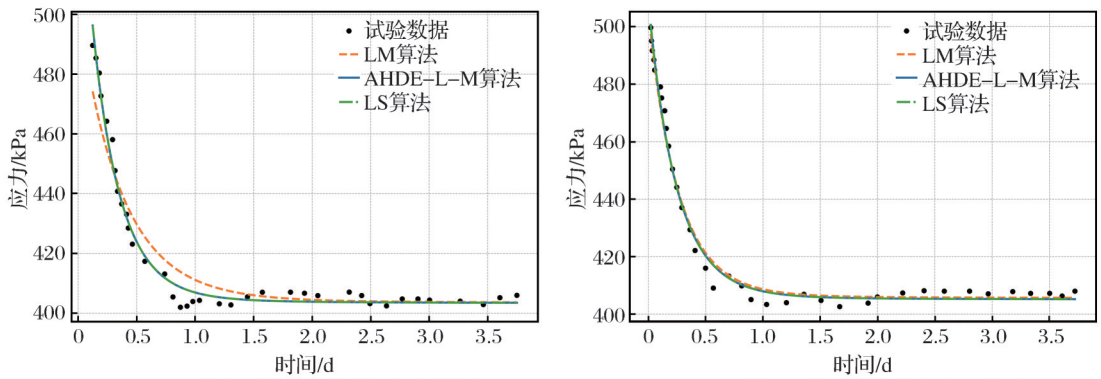
由表1和图4可知,本文所构建分数阶本构模

表1 本文所提模型与其他模型的拟合优度对比

Table 1 Comparison of goodness-of-fit of the model proposed in this paper to the other models

锚杆试件编号	拟合优度指标	AHDE-L-M耦合算法	最小二乘法	L-M算法
A-1	R^2	0.9862	0.9862	0.9293
	RMSE	3.1245	3.1247	7.0691
	MAE	2.4774	2.4812	5.3018
B-1	R^2	0.9903	0.9903	0.9891
	RMSE	3.2186	3.2188	3.4266
	MAE	2.6402	2.6355	2.5725

注:模型计算所用的原始数据来自宋洋等(2021)



(a) A-1锚杆预应力损失数据拟合结果 (b) B-1锚杆预应力损失数据拟合结果

图4 文献锚杆预应力损失数据拟合结果(计算所用原始数据来自宋洋等,2021)

Fig. 4 Fitting results of anchor prestress loss data from the literature(original data for calculation from Song et al,2021)

型对2组独立来源的锚杆预应力损失数据均实现了高精度拟合,A-1锚杆R^2达0.9862,B-1锚杆R^2达0.9903。尽管原始文献研究对象为岩体而非饱和黏土,但模型仍能够准确再现应力衰减的“快速—缓慢”两阶段规律,这表明即便在试验条件可控且数据采样相对稀疏的情况下,本文模型仍能稳定收敛并取得优异的拟合效果,充分验证了其在有限样本条件下的参数可辨识性和稳健性。

进一步对比发现,宋洋等(2021)基于整数阶广义Kelvin模型对A-1和B-1这2组锚杆损失数据的拟合R^2分别为0.983和0.974。本文分数阶模型对A-1(R^2=0.9862)和B-1(R^2=0.9903)锚杆的拟合精度均优于原文同类数据。更为关键的是,本文模型无需进行分段处理(原文需依据屈服强度将曲线划分为两段),即可自然描述预应力从快速衰减到缓慢收敛的连续过渡过程。这充分体现了分数阶微积分在统一刻画材料记忆效应和连续松弛特性方面的理论优势。

3.2 基于工程实例的模型适用性验证

为进一步检验本文所提模型在真实工程环境中的适用性,以广西友谊关智慧口岸货运通道边坡支护工程为应用场景,开展模型参数识别与拟合效果分析。本研究区域边坡位于典型喀斯特地貌,地层由强风化石灰岩和饱和黏土共同构成。强风化石灰岩构成了系统的空间结构骨架,而饱和黏土则充填于岩体裂隙和孔隙中。从力学机制分析,锚固系统的长期预应力损失主要取决于充填黏土的长期变形行为。饱和黏土产生的持续变形导致系统内部的应力转移,而石灰岩部分由于刚度较大且变形极小,在分析中可视为线弹性骨架。

基于上述地质条件和力学简化,本文建立的分数阶黏弹性模型参数(如η_k,E_h和E_k等)并非单纯代表孤立土样的内在属性,而是基于现场监测数据通过反演分析确定的宏观有效参数。这些参数能够捕捉石灰岩—黏土组合系统的整体时效响应,从而确保其对喀斯特地层特定工况的适用性。监测锚杆的关键设计参数见表2。

在参数识别方面,采用分数阶广义Kelvin元件描述组合介质中饱和黏土产生的宏观黏弹性行为。具体而言,利用AHDE-L-M耦合算法(AHD-E-LM),结合能够反映系统综合响应(石灰岩约束效应+黏土主导的黏弹性)的锚杆监测数据,反演识别出模型的宏观有效参数。该算法具备“全局搜索+局部精化”的能力,能够捕捉复杂的非线性交互作用,确保识别参数与喀斯特地层环境相匹配,并准确表征以黏土变形为主导的应力松弛特征。

表2 检测锚杆设计参数

Table 2 Design parameters of the monitored soil anchor

参数	数值	参数	数值
锚筋型号	PSB1080	钻孔孔径/mm	150
设计荷载/kN	250	监测数据来源	71号锚杆振弦式压力计

为验证所提算法在表征锚杆预应力演化方面的有效性,以71号锚杆的监测数据作为研究对象,评估了AHDE-L-M耦合算法的拟合性能。识别出的参数结果如下:E_h=5 050 kPa,E_k=50 kPa,E_p=52 680 kPa,η_k=129 000 kPa·d,ε_c=0.005,a=0.9。为进行对比分析,同时采用遗传算法(GA)、粒子群算法(PSO)、Levenberg-Marquardt算法(L-M)和最小二乘法(LS),评价不同算法在捕捉预应力演化整体趋势特征方面的表现。

由于监测结果包含复杂的工程环境背景,因此比试验结果更复杂,包含应力快速下降和缓速下降2个阶段。锚固系统应力松弛拟合过程中,分数阶模型与监测数据点重合度较高,较为精准地还原了应力随时间快速衰减、后期逐步趋于稳定的松弛规律(图5),与工程中应力松弛初期衰减快、后期稳定的经验一致。5种方法绘制的曲线线型具有明显差别。基于AHDE-L-M耦合算法识别出的参数,曲线与监测数据吻合度最高,具有较陡峭的初始下降段,且在后续松弛过程中能够持续追踪应力的缓慢衰减趋势。L-M算法和最小二乘法(LS)得到的曲线整体较为平缓,其中最小二乘法最快进入应力平稳状态,但对初期快速衰减段的刻画略显不足。新增的遗传算法(GA)和粒子群算法(PSO)虽能捕捉应力松弛的整体下降趋势,但拟合精度介于L-M算法与最小二乘法之间:2条曲线的初始值略低于实测数据,中期下降速率较为均匀,但后期对缓慢衰减阶段的追踪能力比AHDE-L-M耦合算法弱,表现为曲线过早趋于平稳,未能充分反映应力的持续松弛特征。总体而言,AHDE-L-M耦合算法在刻

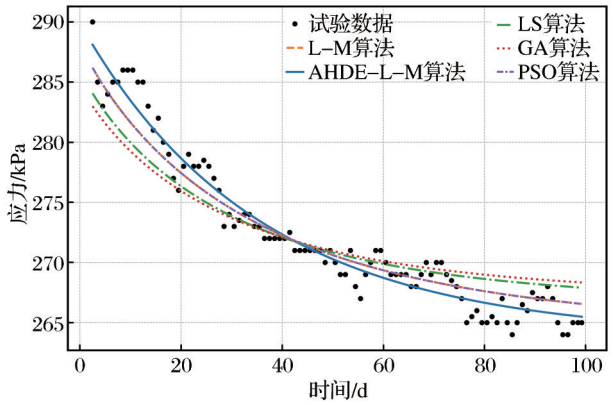


图5 锚固系统应力松弛结果

Fig. 5 Stress relaxation results of the anchorage system

画“快速衰减—缓慢收敛”两阶段演化规律方面优势最为显著。

由表3可以看出，AHDE-L-M算法在3项拟合优度指标上均取得最优结果，其决定系数R^2为0.9517，高于L-M算法（0.9264）、最小二乘法（0.8528）、GA（0.8084）和PSO（0.9264），表明该方法对锚杆应力松弛过程具有较好的拟合能力。在误差指标方面，AHDE-L-M算法的*RMSE*和*MAE*分别为1.4092和1.1501，均为最小值，说明其拟合结果与实测数据之间的整体偏差较小，拟合精度较高。相比之下，GA算法的R^2最低，且*RMSE*和*MAE*均为最大值，表明其在本算例中的参数识别效果相对有限。PSO算法在数值指标上与L-M算法接近，但从拟合曲线可以看出，其对后期应力缓慢衰减阶段的刻画存在一定偏差，整体拟合效果略逊于AHDE-L-M算法。上述差异可能与不同算法的优化机制和参数更新特征有关。总体而言，AHDE-L-M耦合策略通过结合全局搜索与局部精化的优势，在本算例中表现出更优的拟合精度和稳定性。

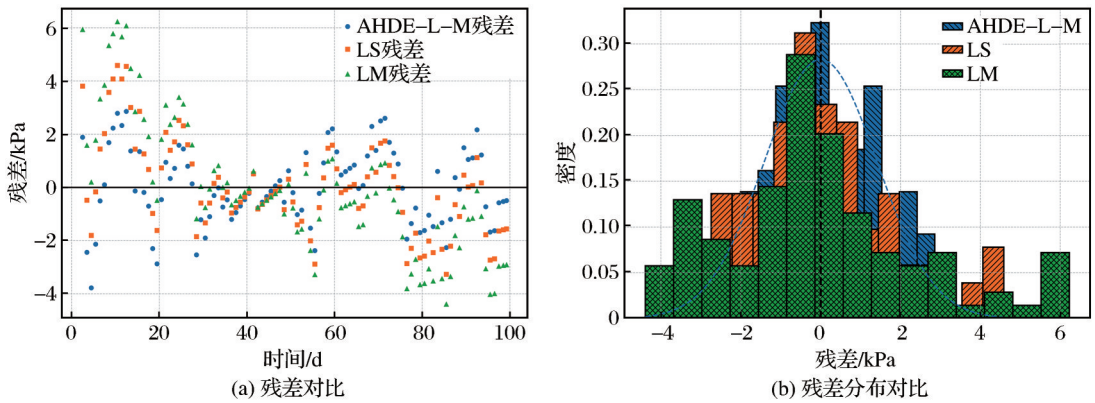
表3 锚杆应力松弛参数拟合优度对比

Table 3 Comparison of goodness-of-fit indicators for anchor bolt stress relaxation parameters

拟合优度指标	AHDE-LM算法	LS算法	L-M算法	GA算法	PSO算法
R^2	0.9517	0.8528	0.9264	0.8084	0.9264
RMSE	1.4092	2.4595	1.7389	2.8055	1.7389
MAE	1.1501	1.8541	1.3476	2.1384	1.3476

残差分析结果如图6所示，其中AHDE-L-M算法的参数识别精度优于L-M算法和最小二乘法。AHDE-L-M算法整体更紧密地围绕残差等于0的基准线分布，随时间变化的波动范围更小；最小二乘法的残差分散程度大，部分残差偏离0线较远，说明前者在不同时间点的拟合偏差更稳定[图6(a)]。此外，AHDE-L-M算法的残差密度分布峰值更高，区间更集中（主要聚集在0附近）；最小二乘法的残差分布更分散，峰值更低。这表明耦合算法的拟合残差更趋近于小误差集中分布的特征，拟合偏差的随机性更弱，系统性精度更高[图6(b)]。L-M算法在处理非线性锚杆应力松弛问题时，效果优于最小二乘法，但不如本文建立的耦合算法。从残差时序波动和残差概率分布2个维度，进一步验证了AHDE-L-M算法对锚杆应力松弛参数的拟合更精准和稳定。

综合上述拟合曲线、定量指标及残差分布可



(a) 残差对比 (b) 残差分布对比

图6 残差分析结果

Fig. 6 Residual analysis results

知,本文所建分数阶本构模型在广西友谊关边坡工程实例中得到了充分验证。该模型能够准确刻画饱和黏土地层中锚杆预应力的长期松弛行为,完整再现了“快速衰减—缓慢趋稳”的两阶段演化特征。在参数识别方面,AHDE-L-M 算法通过“全局搜索+局部精化”的耦合策略,在全局寻优能力与局部收敛效率之间取得了合理平衡,其识别结果与监测数据高度吻合,拟合稳定性优于单一 L-M 算法、最小二乘法及 GA、PSO 等智能算法。上述结果表明,本文提出的分数阶模型及混合优化方法在复杂工程环境中具有良好的适用性和可靠性,可为饱和黏土中锚固系统的长期稳定性分析提供理论依据和参数识别手段。

3.3 参数敏感性分析

为进一步评估所建分数阶模型的适用性及关键参数对锚杆应力松弛行为的影响规律,基于分数阶本构模型开展了敏感性分析。通过控制单一变量,考察分数阶阶数、黏滞系数、土体弹性模量及锚杆弹性模量对锚杆应力松弛过程的影响,结果如图 7 所示。

(1)分数阶阶数的影响。如图 7(a)所示,随着阶数由 0.5 增大至 0.9,锚杆应力松弛速度显著加快(阶数为 0.9 时的后期应力明显较低)。这表明分数阶阶数是控制松弛速度的关键参数。从物理机制角度看,分数阶阶数反映了锚杆—饱和黏土体系中多尺度时变效应的时间分布特征,包括土体骨架黏弹性滞后、孔隙水压力渐进消散和界面黏结—滑移演化等历史依赖行为。阶数越高,表明体系的时间记忆权重更偏向短时响应,应力衰减更加显著;阶数较低则对应更强的长期记忆特征,表现为预应力维持时间延长。因此,分数阶参数不仅具有数学调节意义,也可视为表征界面—固结耦合作用强度的宏观指标。工程上可通过调节模型阶数以匹配不同岩土条件,例如在强黏弹性或孔隙水消散较快的环境中,较高阶数模型能够更准确地反映其松弛特性。

(2)黏滞系数的影响。如图 7(b)所示,当黏滞系数由 5×10^4 kPa·d 增加至 2×10^5 kPa·d 时,应力松

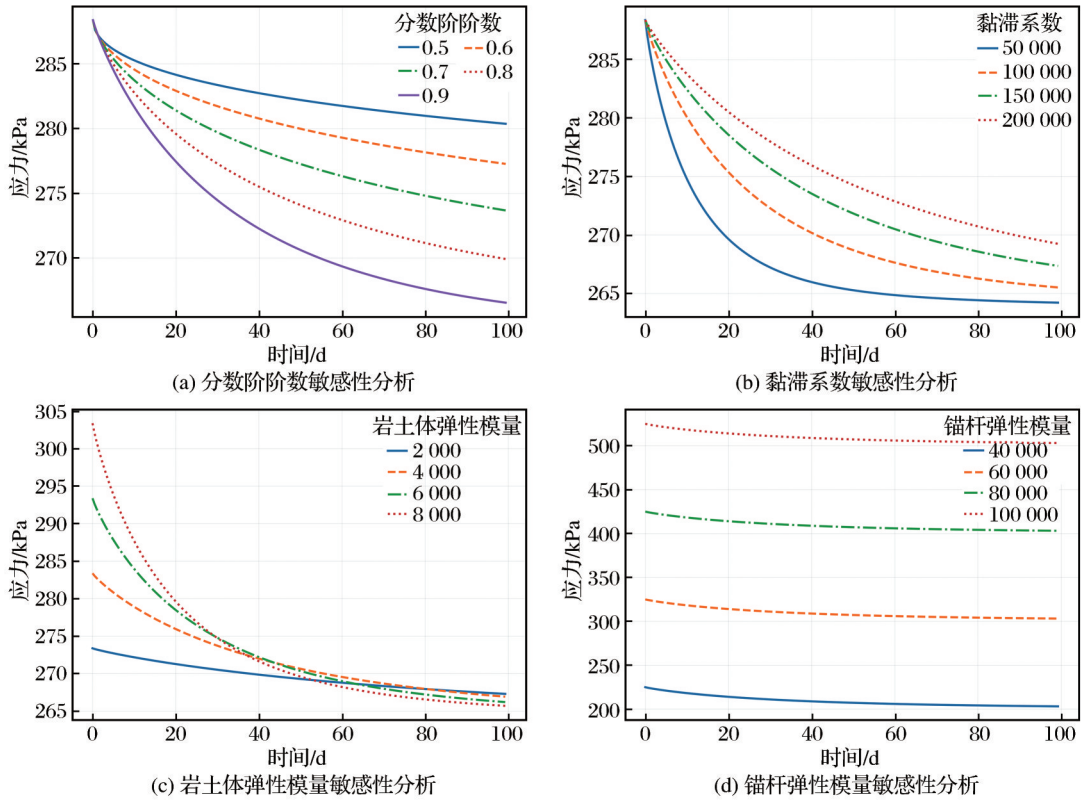


图 7 不同参数敏感性分析

Fig. 7 Sensitivity analysis of different parameters

弛速度明显减缓(高黏滞系数曲线后期应力较高)。黏滞系数反映了体系的黏性阻力,其值越大,材料内部能量耗散越慢,应力衰减越平缓。该研究结果表明,可通过采用高黏滞性能的注浆材料或界面改性手段来延缓锚杆预应力衰减,从而提升长期锚固效果。

(3)土体弹性模量的影响。如图7(c)所示,当土体弹性模量由2 000 kPa增大至8 000 kPa时,初始锚固应力显著升高(模量为8 000 kPa时初始应力约为305 kPa),但随着时间的推移,不同模量下的后期稳定应力差异逐渐缩小。这说明土体刚度主要影响初始锚固力,而对长期松弛趋势的影响相对较弱。工程中若需提高初始锚固力,可优先通过注浆或地基改良等措施增强土体刚度。

(4)锚杆弹性模量的影响。如图7(d)所示,当锚杆弹性模量由4×10^4 kPa提升至1×10^5 kPa时,初始应力由约230 kPa增大至500 kPa以上,且应力松弛速度显著减缓(高模量曲线趋于平缓)。这表明锚杆自身刚度是决定初始锚固力和长期应力保持能力的核心因素。选用高强钢或高模量复合材料制成的锚杆,可在显著提高初始锚固力的同时,有效抑制长期应力衰减,对维持结构的长期稳定性具有重要意义。

以上敏感性分析结果可为工程设计提供一定的参数选取参考。在本研究所涉及的饱和黏土条件及试验标定范围内,分数阶阶数宜根据现场松弛速率进行反演确定,通常处于0.6~0.9区间内时能够较好地反映明显的黏弹性松弛特征;黏滞系数的取值应结合注浆材料性能和土体渗透条件进行校核,高黏滞参数有利于延缓预应力衰减;土体弹性模量主要影响初始锚固力,可通过地基加固或改良措施进行调控;锚杆弹性模量则直接决定体系整体刚度与长期应力保持能力,优选高模量材料有助于提升长期稳定性。需要指出的是,上述参数范围适用于结构性与方向性特征不显著的饱和黏土环境,当地层存在明显分层或各向异性特征时,应结合现场试验进行针对性修正。

4 结论

(1)基于分数阶微积分构建的应力松弛本构模型,有效刻画了锚杆预应力的非线性衰减过程。该模型基于Riemann-Liouville分数阶导数理论,通过引入双参数Mittag-Leffler函数,有效表征了锚固体系的记忆效应和连续松弛特性。工程实例验证结果表明,模型能够准确再现应力快速衰减—缓慢收敛的两阶段演化规律,其拟合决定系数达0.9517,为工程中饱和黏土中锚杆长期力学行为分析提供了可靠的理论工具。

(2)针对分数阶模型参数识别困难,提出AHDE与L-M算法耦合的"全局搜索+局部精化"策略,显著提升了参数识别的精度和稳定性。通过室内试验和工程实例双重验证,并将其与GA、PSO、L-M和LS等算法进行系统对比,结果表明:该方法在拟合精度(R^2=0.9517)和误差控制等方面均优于对比算法,充分验证了其在复杂工程环境中的适用性和可靠性,为模型推广应用提供了可靠的参数识别手段。

(3)参数敏感性分析揭示了各控制参数对应力松弛过程的影响机制,为工程设计和优化提供了明确指导。研究结果表明,分数阶阶数是控制松弛速率的最敏感参数,其增大会显著加速应力衰减;黏滞系数决定了松弛过程的延缓程度;而锚杆弹性模量对维持长期预应力水平具有决定性作用。基于此,工程中可通过选用高模量锚杆材料、优化注浆体性能等措施,有效控制预应力长期损失。

(4)本文提出的分数阶本构模型适用于结构性与方向性特征不显著的饱和黏土环境。在工程应用中,模型参数应结合现场试验或长期监测数据进行反演确定,以保证预测结果的可靠性。当土体存在明显层理结构、强各向异性特征或多场耦合作用时,应在现有模型基础上进行修正或扩展。总体而言,本文提出的分数阶本构模型及混合识别方法为饱和黏土中锚杆长期稳定性分析与设计优化提供了具有推广潜力的理论与计算框架。

参考文献(References):

Cai S M, Chen Y M, Liu Q X, 2024. Development and validation of fractional constitutive models for viscoelastic-plastic creep in time-dependent materials: rapid experimental data fitting [J]. Applied Mathematical Modelling, 132: 645-678.

Ferrás L L, Morgado M L, Rebelo M, 2023. A generalised distributed-order Maxwell model[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 46(1): 368-387.

Koeller R C, 1984. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity[J]. Journal of Applied Mechanics, 51(2): 299-307.

Zhu S M, Chen C F, Zhang G B, et al, 2022. Theoretical and experimental investigations of anchoring force loss behavior for prestressed ground anchors[J]. Canadian Geotechnical Journal, 59(9): 1587-1601.

陈昌富,杜成,朱世民,等,2021.红黏土土层锚杆界面剪切应力松弛试验及其模型[J].岩土力学,42(5):1201-1209. Chen Changfu, Du Cheng, Zhu Shimin, et al, 2021. Experimental study and model of interface shear stress relaxation behavior of anchors in red clay[J]. Rock and Soil Mechanics, 42(5): 1201-1209.

陈方明,胡泉光,宁光忠,2017.三轴应力条件下粉砂质泥岩分级松弛特性[J].山东大学学报(工学版),47(3):125-129. Chen Fangming, Hu Quanguang, Ning Guangzhong, 2017. Silt mudstone stress relaxation characteristics under tri-axial stress condition[J]. Journal of Shandong University (Engineering Science), 47(3): 125-129.

杜贝举,刘长友,吴锋锋,等,2020.深井高应力软弱围岩巷道变形机理及控制研究[J].采矿与安全工程学报,37(6):1123-1132. Du Beiju, Liu Changyou, Wu Feng, et al, 2020. Deformation mechanism and control technology of roadway in deep mine with high stress and weak surrounding rock[J]. Journal of Mining & Safety Engineering, 37(6): 1123-1132.

康红普,范明建,高富强,等,2015.超千米深井巷道围岩变形特征与支护技术[J].岩石力学与工程学报,34(11):2227-2241. Kang Hongpu, Fan Mingjian, Gao Fuqiang, et al, 2015. Deformation and support of rock roadway at depth more than 1000 meters[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 34(11): 2227-2241.

李国维,汪井秋,Sidi K B,等,2020.侵蚀环境下预应力GFRP锚杆结构应力松弛特征[J].岩石力学与工程学报,39(5):877-886. Li Guowei, Wang Jingqiu, Sidi K B, et al, 2020. Stress relaxation characteristics of prestressed GFRP anchor structure in corrosive environment[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 39(5): 877-886.

李厚恩,秦四清,孙强,2007.基坑支护锚杆预应力损失探讨及预测分析[J].工程勘察,35(4):7-10. Li Hou'en, Qin Siqing, Sun Qiang, 2007. Analysis and prediction of stress loss of pre-stressed anchor in foundation pit[J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 35(4): 7-10.

李娟娟,孟庆彬,安刚健,等,2025.深部破裂围岩—锚杆支护时效特性及巷道长时稳定性分析[J].中国矿业,34(9):244-256. Li Juanjuan, Meng Qingbin, An Gangjian, et al, 2025. Time-effect characteristics of bolt support in deep fractured surrounding rock and long-term stability analysis of roadway[J]. China Mining Magazine, 34(9): 244-256.

李涛,蔡海波,刘波,等,2020.膨胀土地层锚索预应力损失与流变耦合模型研究[J].岩石力学与工程学报,39(1):147-155. Li Tao, Cai Haibo, Liu Bo, et al, 2020. Study on prestress loss and rheological coupling model of anchor cables in expansive soil layers[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 39(1): 147-155.

刘小虎,杨勇,姚直书,等,2025.基于CiteSpace可视化知识图谱分析的锚杆支护技术研究进展与展望[J].中国矿业,34(9):234-243. Liu Xiaohu, Yang Yong, Yao Zhishu, et al, 2025. Research progress and prospects of anchor support technology based on CiteSpace visualization knowledge graph[J]. China Mining Magazine, 34(9): 234-243.

宋洋,李永启,2021.锚杆松弛与岩体蠕变耦合预应力损失模型研究[J].地下空间与工程学报,17(4):1091-1098. Song Yang, Li Yongqi, 2021. Study on the model of prestress loss coupled with cable relaxation and rock creep[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 17(4): 1091-1098.

孙世国,贾欣欣,肖剑,2022.岩土预应力锚固技术研究现状及发展趋势分析[J].煤矿安全,53(3):213-220. Sun Shiguo, Jia Xinxin, Xiao Jian, 2022. Research status and development trend analysis of geotechnical pre-stressed anchoring technology[J]. Safety in Coal Mines, 53(3): 213-220.

田洪铭,陈卫忠,肖正龙,等,2015.泥质粉砂岩高围压三轴压缩松弛试验研究[J].岩土工程学报,37(8):1433-1439. Tian Hongming, Chen Weizhong, Xiao Zhenglong, et al, 2015. Triaxial stress relaxation properties of argillaceous siltstone under high confining pressure[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 37(8): 1433-1439.

田洪铭,陈卫忠,赵武胜,等,2013.宜—巴高速公路泥质红砂岩三轴应力松弛特性研究[J].岩土力学,34(4):981-986. Tian Hongming, Chen Weizhong, Zhao Wusheng, et al, 2013. Analysis of triaxial stress relaxation properties of red silty mudstone of Yichang-Badong highway[J]. Rock and Soil Mechanics, 34(4): 981-986.

汪明武，徐新宇，周天龙，等，2020.网纹红土分数阶应力松弛模型[J].计算力学学报，37(3)：362-367.Wang Mingwu，Xu Xinyu，Zhou Tianlong，et al，2020.The fractional order relaxation model of net-like red soil[J].Chinese Journal of Computational Mechanics，37(3)：362-367.

王国富，李强，路林海，等，2018.锚索预应力蠕变损失计算新模型及工程应用[J].建筑结构，48(15)：110-114.Wang Guofu，Li Qiang，Lu Linhai，et al，2018.Research and application of a new coupled model of anchor prestress loss and rock creep [J]. Building Structure，48 (15)：110-114.

王宇，黎瑾，闫亮，等，2024.卸荷损伤泥岩应力松弛特征及本构模型研究[J].地下空间与工程学报，20(5)：1515-1527.Wang Yu，Li Jin，Yan Liang，et al，2024.Study on the stress relaxation characteristics and constitutive model of unloading damage mudstone[J].Chinese Journal of Underground Space and Engineering，20(5)：1515-1527.

魏航，姚兆明，孔宏水，等，2025.冻结黄土应力松弛特性及分数阶广义Kelvin松弛模型分析[OL].工程科学与技术，1-13[2026-07-29].https://link.cnki.net/urlid/51.1773.TB.20250928.1645.004. Wei Hang，Yao Zhaoming，Kong Hongshui，et al，2025. Stress relaxation characteristics of frozen loess and analysis of fractional-order generalized Kelvin relaxation models [OL]. Engineering Science and Technology，1-13 [2026-07-29]. https://link. cnki. net/urlid/51.1773.TB.20250928.1645.004.

许江，李艾峰，彭守建，等，2025.基于广义应力松弛特性的岩石时效性数值模拟方法研究[J].岩土力学，46(9)：2943-2954，2966.Xu Jiang，Li Aifeng，Peng Shoujian，et al，2025.Numerical simulation method for time-dependent behavior of rock based on generalized stress relaxation[J].Rock and Soil Mechanics，46(9)：2943-2954，2966.

许江，饶豪魁，彭守建，等，2023.三轴应力条件下凝灰岩广义应力松弛流变模型的构建[J].采矿与安全工程学报，40(6)：1264-1272.Xu Jiang，Rao Haokui，Peng Shoujian，et al，2023.Establishment of generalized rheological model for rock under triaxial stress[J].Journal of Mining & Safety Engineering，40(6)：1264-1272.

于怀昌，李亚丽，刘汉东，2011a.粉砂质泥岩三轴压缩应力松弛本构模型研究[J].煤炭学报，36(8)：1258-1263.YuHuaichang，LiYali，LiuHandong，2011a.Study of stress relaxation model of silty mudstone under triaxial compression[J].Journal of China Coal Society，36(8)：1258-1263.

于怀昌，史广诚，刘汉东，等，2019.基于分数阶微积分的岩石非线性黏弹性应力松弛模型研究[J].应用基础与工程科学学报，27(1)：194-204. Yu Huaichang，Shi Guangcheng，Liu Handong，et al，2019.A nonlinear viscoelastic stress relaxation model of rock based on fractional calculus[J].Journal of Basic Science and Engineering，27(1)：194-204.

于怀昌，周敏，刘汉东，等，2011b.粉砂质泥岩三轴压缩应力松弛特性试验研究[J].岩石力学与工程学报，30(4)：803-811. YuHuaichang，ZhouMin，LiuHandong，et al，2011b. Experimental investigation on stress relaxation properties of silty mudstone under triaxial compression[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，30(4)：803-811.

张春晓，肖宏彬，包嘉邈，等，2018.膨胀土应力松弛的分数阶模型[J].岩土力学，39(5)：1747-1752，1760.Zhang Chunxiao，Xiao Hongbin，Bao Jiamiao，et al，2018.Stress relaxation model of expansive soils based on fractional calculus[J].Rock and Soil Mechanics，39(5)：1747-1752，1760.

张焕雄，张成良，王良成，等，2025.基于WAA-LSTM模型的锚索预应力长期损失预测研究[J].黄金科学技术，33(3)：565-578. Zhang Huanxiong，Zhang Chengliang，Wang Liangcheng，et al，2025.Prediction of long-term prestress loss of anchor cables based on WAA-LSTM model [J].Gold Science and Technology，33(3)：565-578.

张金鼎，张凯，张黎明，等，2025.融合自适应变异策略与差分进化算法的油藏自动历史拟合方法[J].油气地质与采收率，32(2)：152-162. Zhang Jinding，Zhang Kai，Zhang Liming，et al，2025. Automatic reservoir history matching method based on adaptive mutation strategy and differential evolution algorithm [J]. Petroleum Geology and Recovery Efficiency，32(2)：152-162.

A Fractional Constitutive Model for Long-Term Relaxation of Anchor Pre-stress in Saturated Clay and Its Key Parameter Influence Analysis

LIU Taiyu[1,2], LUO Dongyu[1,2], JIANG Guanxixi[3], SUN Cheng[1,2,4,5]

1.*School of Intelligent Construction, Guangxi Minzu University, Nanning* 530006,*Guangxi, China*;

2.*Engineering Research Center for Intelligent Monitoring and Testing of Engineering Operation and Maintenance, Guangxi Minzu University, Nanning* 530006, *Guangxi, China*;

3.*College of Mathematical and Physical Sciences, Nanjing University of Technology, Nanjing* 211816, *Jiangsu, China*;

4.*School of Aerospace and Building Engineering, Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *Heilongjiang, China*;

5.*Hebei Key Laboratory of Dual Media Power Technology, Handan* 056000, *Hebei, China*

Abstract: This study proposes a coupled constitutive model for the stress relaxation of the anchor-saturated clay system, grounded in fractional calculus theory. The anchor is modeled as a linear elastic body due to its considerably higher stiffness and negligible rheological effects under service stress levels. In contrast, the saturated clay is represented by a fractional-order generalized Kelvin model, whose parallel structure effectively encapsulates the "memory effect" and "stage-wise stabilization" features—characterized by rapid initial decay followed by gradual convergence—commonly observed in engineering practice. The use of the Riemann-Liouville fractional derivative, along with the two-parameter Mittag-Leffler function, provides a unified theoretical framework for describing material memory effects and continuous relaxation characteristics. To achieve high-precision parameter identification, we propose a hybrid optimization strategy that integrates the adaptive hybrid differential evolution (AHDE) algorithm with the Levenberg-Marquardt (L-M) algorithm. The AHDE, featuring adaptive parameter mechanisms and sub-population mutation strategies, conducts a global search, while the L-M algorithm subsequently performs local refinement. This approach effectively addresses the challenges of non-convexity and multi-parameter coupling inherent in fractional-order constitutive models. The strategy's validity is confirmed using prestress monitoring data from the 71# anchor bolt, which is equipped with a vibrating wire pressure cell at the Youyiguan Intelligent Port freight corridor slope project in Guangxi, China. The monitoring data exhibit a characteristic two-stage evolution, marked by rapid initial decay followed by slow stabilization. The findings indicate that the model effectively replicates the complete stress relaxation process, achieving an R^2 value of 0.9517, and surpasses the standalone Levenberg-Marquardt (L-M), least squares, genetic algorithm, and particle swarm optimization methods in terms of both fitting accuracy and residual stability. Sensitivity analysis elucidates that the fractional order predominantly governs the relaxation rate, the viscosity coefficient dictates the degree of retardation, the soil elastic modulus primarily influences the initial anchoring force, and the anchor elastic modulus is crucial for sustaining long-term pre-stress levels. This study presents a comprehensive framework that integrates fractional-order constitutive modeling, hybrid optimization-based parameter identification, and mechanistic parameter analysis, providing both theoretical insights and practical guidance for the analysis of long-term prestress relaxation and the engineering design of anchored geotechnical structures in soft ground.

Key words: anchorage system; stress relaxation model; fractional calculus; differential evolution algorithm; parameter identification