

基于深度学习技术的薄板非线性 弯曲多项式级数解法

彭林欣^{1,2,3}, 孙建坤¹, 韦冬炎⁴, 黄钟民¹

(1. 广西大学土木建筑工程学院, 530004 南宁; 2. 广西防灾减灾与工程安全重点实验室, 530004 南宁; 3. 广西大学工程防灾与结构安全教育部重点实验室, 530004 南宁; 4. 广西机电职业技术学院, 530004 南宁)

摘 要: 基于弹性力学理论, 结合深度学习技术, 发展了一种求解薄板几何非线性弯曲分析的多项式解法。为满足边界条件并实现快速求导, 首先基于符号微分计算并搭建好位移试函数模型, 该模型的输入为求解域内任意一点的坐标, 并输出与之对应的位移, 再考虑基于变分原理的几何非线性弯曲理论, 以薄板的系统势能构造目标函数, 最后结合自动微分计算目标函数的梯度, 并结合 Adam 优化算法进行参数优化, 直至得到最优的参数向量, 进而得到薄板位移显式的多项式级数解答。两种微分技术的结合提高了程序的易用性与准确性, 本研究求解了不同形状、边界下薄板的几何非线性弯曲问题, 分析了不同阶次下多项式级数解答的收敛性, 并将本研究解与 Abaqus 有限元解及文献解进行对比, 证明了本方法的有效性和适用性。

关键词: 几何非线性; 符号微分; 自动微分; 多项式级数; 深度学习

中图分类号: O343 **文献标志码:** A **DOI:** 10. 11776/j. issn. 1000-4939. 2026. 01. 013

文章编号: 1000-4939(2026)01-0144-11 **CSTR:** 32414. 14. cjam. issn. 1000-4939. 2026. 01. 013

Polynomial series solution method for nonlinear bending of thin plates based on deep learning technique

PENG Linxin^{1,2,3}, SUN Jiankun¹, WEI Dongyan⁴, HUANG Zhongmin¹

(1. Civil Engineering and Architecture School, Guangxi University, 530004 Nanning, China;
2. Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Engineering Safety, 530004 Nanning, China;
3. Key Laboratory of Disaster Prevention and Structural Safety of Ministry of Education, Guangxi University, 530004 Nanning, China; 4. Guangxi Technological College of Machinery and Electricity, 530004 Nanning, China)

Abstract: Based on the theory of elastic mechanics and combined with deep learning technique, a polynomial method for solving geometric nonlinear bending analysis of thin plates is developed. In order to satisfy the boundary conditions and realize rapid derivation, trial function model of the displacement is built based on symbolic differential calculation. The input of the model is the coordinates of any point in the so-

收稿日期: 2023-06-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 12162004); 国家重点研发计划资助项目 (No. 2019YFC1511103); 广西科技重大专项资助项目 (桂科 AA18118029); 广西重点研发计划资助项目 (桂科 AB22036007)

通信作者: 黄钟民. E-mail: huangzm@alu.gxu.edu.cn

引用格式: 彭林欣, 孙建坤, 韦冬炎, 等. 基于深度学习技术的薄板非线性弯曲多项式级数解法[J]. 应用力学学报, 2026, 43(1): 144-154.

PENG Linxin, SUN Jiankun, WEI Dongyan, et al. Polynomial series solution method for nonlinear bending of thin plates based on deep learning technique[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2026, 43(1): 144-154.

lution domain, and the output is the corresponding displacement. Considering the geometric nonlinear bending theory based on variational principle, the objective function is constructed by the systemic potential energy of thin plate. Last, the gradient of the objective function is calculated by the automatic differentiation, and the parameters are optimized by the gradient descent method until the optimal parameter vector is obtained. Then the explicit polynomial series solution of the displacement is obtained. The combination of the two differential techniques improves the ease of use and accuracy of the program. In this paper, the geometric nonlinear bending problems of thin plates with different shapes and boundaries are solved, and the convergence of polynomial series solutions under different orders is analyzed. The solution is compared with the Abaqus finite element solution and the literature solution, which proves the effectiveness and applicability of the method.

Key words: geometric nonlinearity; symbolic differentiation; automatic differentiation; polynomial series; deep learning

板作为重要的工程构件,相比于线性弯曲,其非线性弯曲性能更加贴合工程实际。自20世纪初,薄板的非线性弯曲问题一直受到广大学者的关注,产生了一系列的数值解法。江涛等^[1]应用辛叠加法,得到了正交各向异性矩形薄板在均匀荷载下弯曲问题的解析解。申国哲等^[2]建立了近场动力学和连续介质力学耦合模型,用于薄板大变形弯曲和断裂分析。MO等^[3]使用SFPM法研究了功能梯度板的非线性弯曲行为。WATTS等^[4]使用无网格伽辽金法研究了四边形复合材料板的几何非线性弯曲问题。陈英杰等^[5]应用矩形薄板修正的功的互等法,推导了大挠度弯曲的广义位移解。ZHANG^[6]使用Ritz法得到了超椭圆薄板非线性弯曲的近似解答。LI等^[7]使用微分求积法和迭代法求解了应变梯度薄圆板的非线性轴对称弯曲。YU^[8]应用分层小波方法分析了几何各向异性薄板非线性弯曲。AL-SHUGAA等^[9]基于Ritz法提出的广义矩阵,处理了矩形各向异性薄板大挠度弯曲问题。CHEN等^[10]利用摄动法设置环形薄板的边界条件和初始条件,推导出非线性大挠度变形解析式。曹天捷^[11]建立了圆心处非奇异的轴对称大挠度圆板弯曲微分方程,利用常微分数值解法进行求解。张迅炜等^[12]基于能量原理,利用Gröbner基法求解了轴对称圆薄板大挠度弯曲问题的变分列式。AGHELINEJAD等^[13]利用打靶法对功能梯度薄板的非线性弯曲常微分方程进行了数值求解。江福汝^[14]利用摄动法研究了环形和圆形薄板在不同边界条件下的非对称非线性弯曲问题,并导出一致有效的渐进解。周次清^[15]利用摄动法研究了正交各向异性矩形薄板的非线性弯曲问题,导出了挠度和应力函数一致有效的 n 阶渐近解。

杨天祥等^[16]提出内部配点法和混合配点法求解方案,研究了均布荷载作用下矩形板的大挠度弯曲问题。陈子荣等^[17]使用挠度试函数作为双三角级数,并利用最小二乘内部配点法求解薄板几何非线性弯曲问题。杨加明等^[18]假设位移函数为梁振动函数,对Karman型正交异性薄板的几何非线性弯曲进行了统一分析。武兰河等^[19]假设位移函数为二元多项式与描述边界形状的基本函数的乘积,利用pb-2Ritz法求解任意四边形薄板的几何非线性弯曲问题。侯祥林等^[20]运用有限差分法和动态设计变量优化算法原理,给出了薄板弯曲大变形挠度求解的动态设计变量优化算法。

除上述解法外,近年来,随着计算机技术在机器学习领域的快速发展,神经网络方法凭借其强大的函数逼近能力,被广泛应用于由偏微分方程描述的力学问题的求解中。RAISSI等^[21]提出物理信息神经网络(physics informed neural networks, PINN)求解非线性偏微分方程。SIRIGNANO等^[22]利用深度伽辽金法求解偏微分方程。SAMANIEGO等^[23]提出了深度能量法用于偏微分方程的求解,给出了弱形式解答。GOSWAMI等^[24]结合迁移学习技术,提出了增强的PINN用于断裂问题的相场建模。YANG等^[25]提出贝叶斯神经网络研究了含有噪声数据的偏微分方程。WANG等^[26]提出了基于子域神经网络的能量方法求解复杂几何的变分问题。唐明健等^[27]利用深度学习技术求解了矩形薄板力学正反问题。黄钟民等^[28]提出了面内变刚度薄板弯曲问题的挠度-弯矩耦合的神经网络解法。E等^[29]将深度学习与Ritz法相结合,提出深度Ritz法求解变分问题。ZHUANG等^[30]将迁移学习与能量方法结合,

分析了 Kirchhoff 板的弯曲、振动和屈曲问题。NGUYEN-THANH 等^[31]利用深度能量法求解超弹性问题。郭宏伟等^[32]将深度能量法和深度配点法用于薄板弯曲问题的求解。张纯等^[33]提出了一种结合深度残差网络和自编码器特征的深度神经网络代理模型,准确预测了结构应力、应变等力学场量的大小与分布。此外,神经网络方法也适用于力学反问题的分析,如裂纹识别^[34]等。神经网络模型实质上是建立输入与输出的函数关系,通过训练不断优化网络内部参数进而确定该函数关系。基于深度学习技术,很多不同的方法被提出,这很大程度上与自动微分技术的成熟有关,通过对上层数学运算的编写及自动微分的变量跟踪,可以很容易求得误差函数的梯度,而无需考虑底层求导接口的设计。然而一个训练完成的深度神经网络模型,将其内部的参数及激活函数整合所得的函数表达式会显得极其复杂,因而许多人将其视为“黑盒”。与有限元等解法相比,其内部的运算机制较为复杂,同时过大的网络会导致较多的待优化参数,进而导致计算资源的浪费。对于弹性力学中的大部分问题,已有许多常见的解法,将这些解法与深度学习技术相结合,可进一步丰富其灵活性。

本研究借鉴传统的弹性力学解法,假设位移试函数为多项式级数形式,以此构建输入与输出的数值模型,并以薄板系统势能作为目标函数,利用深度学习中常用的优化算法对其进行优化,分析了薄板几何非线性弯曲变形。此外,目标函数中包含模型输出关于输入的偏导数。为提升计算效率,本研究利用符号微分求解模型输出关于输入导数的显式表达式,并存储为代码段供后续调用。为使得这些数值模型的内部参数最优,利用自动微分求出目标函数关于网络参数的梯度,并考虑历史梯度的影响,通过梯度下降算法对模型参数进行迭代优化。同时为求得薄板的荷载-位移关系,本研究将荷载进行分段,在每个荷载迭代步下进行上述迭代过程,除第一个迭代步外,其余迭代步的模型参数均来自上一迭代步。最后通过对不同算例的求解分析,对本方法的收敛性及有效性进行分析。

1 薄板几何非线性弯曲理论

对于薄板的非线性弯曲问题,基于变分原理推导出薄板的系统势能。假设薄板的弹性模量为 E ,

厚度为 t ,泊松比为 μ ,刚度为 D ,均布荷载为 q 。薄板的形变势能包括弯曲形变的势能 U_1 和中面应变的势能 U_2 。弯曲形变的势能 U_1 为

$$U_1 = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_1 dV \quad (1)$$

式中,弯曲应力 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{Ez}{1-\mu^2} (w_{xx} + \mu w_{yy}) \\ -\frac{Ez}{1-\mu^2} (w_{yy} + \mu w_{xx}) \\ -\frac{Ez}{1+\mu} w_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

弯曲应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -zw_{xx} \\ -zw_{yy} \\ -2zw_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

将式(2)和式(3)代入式(1),得位移表示的弯曲形变势能为

$$U_1 = \frac{1}{2} \iint D [(w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1-\mu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)] dx dy \quad (4)$$

式中,薄板刚度 D 为

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (5)$$

中面应变势能 U_2 为

$$U_2 = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 dV = \iint \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 dx dy \quad (6)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}_2$ 为中面应力;中面内力 $\mathbf{N}$ 为

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{Et}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \\ \frac{Et}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \\ \frac{Et}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (7)$$

中面应变 ε_2 为

$$\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x + \frac{1}{2}w_x^2 \\ v_y + \frac{1}{2}w_y^2 \\ v_x + u_y + w_x w_y \end{bmatrix} \quad (8)$$

将式(7)和式(8)代入式(6),得

$$U_2 = \frac{Et}{2(1-\mu)^2} \iint \left\{ u_x^2 + v_y^2 + u_x w_x^2 + v_y w_y^2 + \frac{1}{4}(w_x^2 + w_y^2)^2 + \mu(u_x w_y^2 + v_y w_x^2 + 2u_x v_y) + (1-\mu) \left[\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 + v_x u_y + 2(v_x + u_y) w_x w_y \right] \right\} dx dy \quad (9)$$

薄板的总应变能 U 为

$$U = U_1 + U_2 \quad (10)$$

薄板的外力功 W 为

$$W = \int_{\Omega} q w d\Omega \quad (11)$$

式中, Ω 表示薄板的求解域。

故薄板的系统势能 Π 为

$$\Pi = U + W \quad (12)$$

2 基于深度学习的多项式级数解

2.1 位移试函数的多项式级数模型

对于薄板的大挠度弯曲问题,可假设位移试函数为多项式级数形式,采用符号微分快速求解目标

函数中位移的偏导项,利用自动微分技术计算目标函数与待优化参数间的梯度,结合常见的优化算法对参数进行优化。

对于常见的边界条件,可以假设位移试函数为

$$H(x, y; \mathbf{A}_i) = \varphi_i(x, y) N(x, y; \mathbf{A}_i) \quad i = u, v, w \quad (13)$$

式中: $H(x, y; \mathbf{A}_i)$ 表示挠度试函数 $w(x, y; \mathbf{A}_w)$ 、水平位移试函数 $u(x, y; \mathbf{A}_u)$ 以及竖向位移试函数 $v(x, y; \mathbf{A}_v)$; $\mathbf{A}_i$ 为待优化的参数张量 ($\mathbf{A}_w$ 、 $\mathbf{A}_u$ 、 $\mathbf{A}_v$ 分别表示挠度、水平位移及竖向位移的参数张量); $\varphi_i(x, y)$ 为使 $H(x, y; \mathbf{A}_i)$ 满足边界条件的距离函数; $N(x, y; \mathbf{A}_i)$ 采用多项式级数进行构造,形式如下

$$N(x, y; \mathbf{A}_i) = \mathbf{P} \mathbf{A}_i \quad (14)$$

式中,多项式向量 $\mathbf{P}$ 为

$$\mathbf{P} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & \dots \end{bmatrix}$$

系数张量 $\mathbf{A}_i$ 为

$$\mathbf{A}_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ a_{i4} \ \dots \ a_{in}]^T$$

式中, n 表示多项式级数的项数。

本研究采用的多项式级数模型如图1所示。根据不同的边界条件,分别构造出薄板的位移试函数 $H(x, y; \mathbf{A}_i)$ 后,利用符号微分构建位移试函数的各阶导函数模型。当数据点传入模型后,便能快速得到位移及其各阶导数的预测值 $w, u, v, w_x, \dots, v_{yy}$, 进而求出薄板的系统势能,创建目标函数,再通过自动微分技术得到系统势能与参数张量的关系,采用 Adam 优化算法进行优化,最终求出最优的参数向量,即可求出位移试函数的显式表达式。

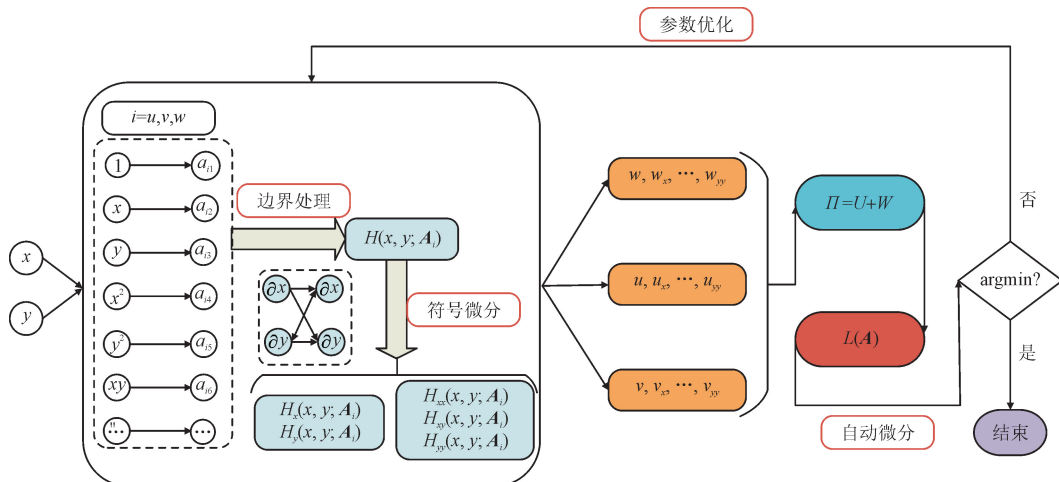


图1 多项式级数模型

Fig. 1 Polynomial series model

本研究的级数模型是由程序通过符号微分运算进行搭建的,在给定的 $\varphi_i(x, y)$ 下,通过更改参数 n 即可搭建模型的计算框架。

2.2 损失函数

边界条件由距离函数 $\varphi_i(x, y)$ 满足,故损失函数仅由薄板的系统势能组成。即

$$L(\mathbf{A}) = \Pi(x, y; \mathbf{A}) \quad (15)$$

式中:势能 Π 是多项式级数模型预测的位移 w, u, v 的函数;张量 $\mathbf{A}$ 是由 $\mathbf{A}_w, \mathbf{A}_u, \mathbf{A}_v$ 构成的集合。

本研究通过构造特解的方式处理简单的本质边界条件,对于复杂的边界条件需在损失函数中考虑。本质边界条件包括简支、固支、自由边界。

1) 固支边界 Γ_1

$$\begin{aligned} w(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}; \mathbf{A}_w) &= 0, u(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}; \mathbf{A}_u) = 0, \\ v(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}; \mathbf{A}_v) &= 0, \frac{\partial w(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}; \mathbf{A}_w)}{\partial n} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式中, n 代表边界的外法线方向。

2) 简支边界 Γ_2

$$\begin{aligned} w(x_{\Gamma_2}, y_{\Gamma_2}; \mathbf{A}_w) &= 0, u(x_{\Gamma_2}, y_{\Gamma_2}; \mathbf{A}_u) = 0, \\ v(x_{\Gamma_2}, y_{\Gamma_2}; \mathbf{A}_v) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

3) 简支边界 Γ_3 : 无约束。

2.3 参数优化

模型训练过程即为参数优化过程,即利用自动微分技术计算误差函数关于参数张量 $\mathbf{A}$ 的梯度并结合优化算法进行误差的反向传播,通过不断地循环训练,得到最优的参数张量 $\mathbf{A}^*$,使得误差函数最小,即

$$\mathbf{A}^* = \arg \min_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}} L(\mathbf{A}) \quad (18)$$

当参数向量取到 $\mathbf{A}^*$ 时,此时模型输出的位移即为薄板的真实位移。

2.4 优化算法

输入: 损失函数 $L(\mathbf{A})$, 学习率 α , 阈值 $\varepsilon = 1 \times 10^{-8}$ 。

输出: 最优参数 $\mathbf{A}^*$ 。

1) 初始化参数 $\mathbf{A}$ 。

2) for Q_i in range (Q_0, Q_n , step): // 荷载分段:
 Q_0 为起始荷载; Q_i 为当前荷载; Q_n 为终止荷载; step 为荷载步长。

for epoch in range(T): // 模型训练; T 为模型

的总训练次数; 用 t 表示 epoch 当前的值。

a) 获取损失函数 $L(\mathbf{A})$, 利用自动微分技术计算梯度值 $\mathbf{g}_t \leftarrow \nabla_{\mathbf{A}} L(\mathbf{A})$ 。

b) $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_{t-1} - \alpha \mathbf{g}_t$, 对参数 $\mathbf{A}$ 进行更新。

c) $\text{Norm}(\mathbf{A}_t - \mathbf{A}_{t-1}) < \varepsilon$, 训练结束, 返回最优参数 $\mathbf{A}^* \leftarrow \mathbf{A}_t / \text{Norm}$ 表示求向量或矩阵的 L2 范数操作。

3 算例

本研究算例均使用 Adam 优化算法进行参数优化,学习率根据实际计算在 $10^{-2} \sim 10^{-4}$ 间调整,位移试函数根据边界条件进行假设。在 Abaqus 分析中,均采用足够数量的 STRI3 单元离散求解域,得到收敛的 Abaqus 解。每个算例中,将本研究解、文献解或 Abaqus 解对比,对比结果由相对误差表示。相对误差 $e = (u - u^*) / u^*$, 其中, u 表示本研究解, u^* 表示 Abaqus 解或文献解, e 表示相对误差。

3.1 三角形薄板

周边简支的三角形薄板如图 2 所示,薄板参数 $a = 1 \text{ m}$, 薄板厚度 $t = 0.01 \text{ m}$, 弹性模量 $E = 3 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 均布荷载 q 。为了说明本研究方法的有效性,分别求解该三角形薄板的小挠度弯曲和大挠度弯曲问题。

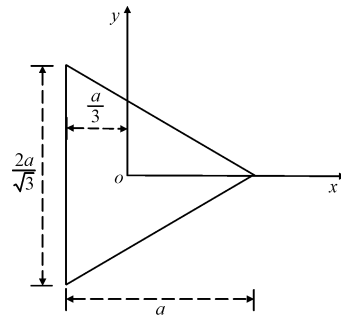


图2 三角形薄板

Fig. 2 Triangular thin plate

本研究所提方法基于能量原理,在简支边界处的应力边界条件得到自然满足,仅需要约束位移边界条件,各位移试函数构造为

$$\begin{aligned} H(x, y; \mathbf{A}_i) &= \left(x + \frac{a}{3} \right) \left[y - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{2a}{3} \right) \right] \cdot \\ &\quad \left[y + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{2a}{3} \right) \right] N(x, y; \mathbf{A}_i) \end{aligned}$$

式中, $N(x, y; \mathbf{A}_i)$ 由三阶多项式级数 ($n=10$) 构造为

$$N(x, y; \mathbf{A}_i) = \mathbf{P} \mathbf{A}_i,$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ a_{i4} \ a_{i5} \ a_{i6} \ a_{i7} \ a_{i8} \ a_{i9} \ a_{i10}]^T$$

该问题小挠度弯曲的理论解答为^[35]

$$w = \frac{q_0}{64aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \cdot \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right)$$

取 $q = -1 \text{ N/m}^2$, 计算该薄板的小挠度弯曲问题。经过优化, 本研究方法所得的 $w(x, y; \mathbf{A}_w)$ 的系数及其理论解答对比见表 1。由对称性可知, 该算例的挠度解答为 y 的偶函数, 因此理论解答中 y 的奇次项系数均为 0, 而优化得到的奇次项系数也达到一个极小值, 其他项系数的求解也与理论解答较为接近。

表 1 本节方法所求系数与理论解答对比

Tab. 1 Comparison of parameters calculated by the method in this section and the theoretical solutions

项	本节方法	理论解答
1	-3.7558×10^{-3}	-3.7449×10^{-3}
x	3.9892×10^{-9}	0
y	-1.1861×10^{-10}	0
x^2	3.3840×10^{-2}	3.3704×10^{-2}
y^2	3.3840×10^{-2}	3.3704×10^{-2}
x^3	-2.5351×10^{-2}	-2.5278×10^{-2}
xy^2	7.6053×10^{-2}	7.5833×10^{-2}
y^3	1.3229×10^{-9}	0
x^4	-5.7293×10^{-2}	-5.6875×10^{-2}
x^3y	-2.6103×10^{-9}	0
x^2y^2	-1.1459×10^{-1}	-1.1375×10^{-1}
y^4	-5.7293×10^{-2}	-5.6875×10^{-2}
x^5	5.7287×10^{-2}	-5.6875×10^{-2}
x^3y^2	-1.1457×10^{-1}	-1.1375×10^{-1}
xy^4	-1.7186×10^{-1}	-1.7062×10^{-1}

取 $q = 80 \text{ N/m}^2$, 计算该薄板的大挠度弯曲问题, 各位移表达式中的参数优化结果见表 2。本研究方法得到的结果与有限元解的结果相一致, 其中 Abaqus 采用 529 个 STRI3 单元对求解域进行离散, 绘制的荷载位移曲线如图 3 所示。

表 2 三角形薄板大挠度弯曲的参数优化结果 ($q = 80 \text{ N/m}^2$)

Tab. 2 Parameter optimization results for large deflection bending of triangular thin plate ($q = 80 \text{ N/m}^2$)

参数	$w(x, y; \mathbf{A}_w)$	$u(x, y; \mathbf{A}_u)$	$v(x, y; \mathbf{A}_v)$
a_{i1}	-5.0196×10^{-1}	4.5655×10^{-6}	8.2463×10^{-11}
a_{i2}	3.0195×10^{-3}	-5.3301×10^{-2}	-1.2724×10^{-9}
a_{i3}	-7.2695×10^{-9}	-1.4027×10^{-9}	-5.3231×10^{-2}
a_{i4}	3.4169×10^{-1}	6.5129×10^{-2}	-5.6911×10^{-9}
a_{i5}	-4.9208×10^{-8}	-3.6540×10^{-9}	-1.3025×10^{-1}
a_{i6}	3.3844×10^{-1}	-6.4697×10^{-2}	-3.1012×10^{-9}
a_{i7}	-3.6209×10^{-1}	5.5239×10^{-2}	1.7769×10^{-8}
a_{i8}	-1.4266×10^{-7}	-8.4800×10^{-10}	5.5429×10^{-2}
a_{i9}	9.7206×10^{-1}	5.9436×10^{-2}	-3.1222×10^{-9}
a_{i10}	-1.8007×10^{-8}	1.2952×10^{-8}	5.5142×10^{-2}

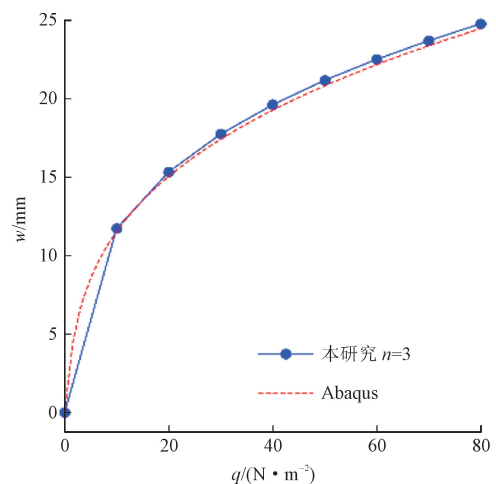


图 3 三角形薄板大挠度弯曲下的荷载位移曲线

Fig. 3 Load-displacement curve under large deflection bending of triangular thin plate

3.2 方形薄板

图 4 所示的周边简支的方形薄板受均布荷载 $q = q_0$ 作用, 厚度为 t , 弹性模量 E 为常量。求解薄板的非线性弯曲问题。

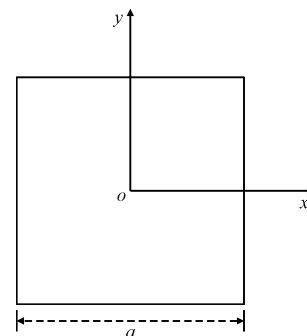


图 4 方形薄板

Fig. 4 Square thin plate

为了便于结果对比,选取无量纲公式为

$$\bar{q} = \frac{qa^4}{Et^4}, \bar{w} = \frac{w}{t}$$

式中: $\bar{q}$ 和 $\bar{w}$ 代表无量纲的荷载和挠度; q 和 w 表示实际的荷载和挠度。采用二阶的多项式级数($n=6$)构造位移试函数为

$$H(x, y; \mathbf{A}_i) = \left(x + \frac{a}{2}\right) \left(x - \frac{a}{2}\right) \left(y + \frac{a}{2}\right) \left(y - \frac{a}{2}\right) \cdot N(x, y; \mathbf{A}_i)$$

表3 方形薄板中心点无量纲挠度对比($n=6$)

Tab. 3 Comparison of dimensionless deflection at the center point of a square thin plate ($n=6$)

$\bar{q}/9.1575$	文献[36]解	Abaqus解	本研究解	相对误差 1/%	相对误差 2/%
1	0.348	0.347	0.346	-0.29	-0.29
4	0.830	0.815	0.809	-2.53	-0.74
16	1.497	1.463	1.458	-2.61	-0.34
64	2.444	2.390	2.394	-2.05	0.17
200	3.574	3.510	3.522	-1.45	0.34
500	4.844	4.769	4.785	-1.22	0.34

此外,讨论多项式级数的阶数对结果收敛性的影响。由图5可以看出,当位移试函数采用二阶以上多项式级数($n=6$)构造时,结果较好地收敛于文献解和Abaqus解,表明优化得到的位移试函数 $w(x, y; \mathbf{A}_w)$ 能够较好地逼近真实的位移函数。

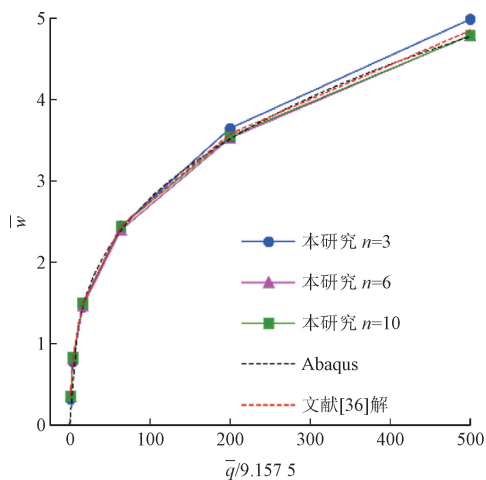


图5 方形薄板中心点无量纲挠度的收敛性分析

Fig. 5 Convergence analysis of dimensionless deflection at the center point of square thin plate

3.3 平行四边形薄板

图6所示平行四边形薄板, $a=1.0\text{ m}$, $b=0.5\text{ m}$, $\beta=60^\circ$,受到均布荷载 $q=100\text{ N/m}^2$ 作用。薄板弹性模量为 $E=3\times 10^6\text{ Pa}$,泊松比 $\nu=0.3$,厚度 $t=0.01\text{ m}$ 。

本算例使用5000个积分点作为位移试函数模型的输入数据,Abaqus有限元分析使用5000个STR13单元离散。为了说明本研究方法计算结果的精确性,表3展示了本研究解与文献[36]解、Abaqus解的无量纲挠度对比。相对误差1表示本研究解与文献解的相对误差,相对误差2表示本研究解与Abaqus解的相对误差。可见,相对误差1在3%内,相对误差2在1%以内,均满足较好的计算精度。

为了便于表述不同的边界工况,将边界用符号代替:固支(C)、简支(S)、自由边(F)。讨论不同边界工况下解答的收敛性。

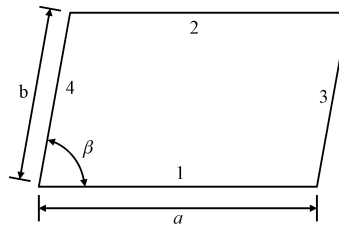


图6 平行四边形薄板

Fig. 6 Parallelgramal thin plate

根据本算例不同的边界工况,各位移试函数中的距离函数 $\varphi_i(x, y)$ 分别构造如下。

四边固支(CCCC)

$$\begin{aligned} \varphi_w(x, y) &= \left[y(y - \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x + \sqrt{3}) \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right]^2, \\ \varphi_u(x, y) &= \varphi_v(x, y) \\ &= y(y - \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x + \sqrt{3}) \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

四边简支(SSSS)

$$\varphi_i(x, y) = y(y - \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x + \sqrt{3}) \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4} \right),$$

$$i = u, v, w$$

3、4边固支,1、2边简支(SCSC)

$$\varphi_w(x, y) = y(y - \sqrt{3}x) \left[(y - \sqrt{3}x + \sqrt{3}) \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right]^2,$$

$$\varphi_u(x, y) = \varphi_v(x, y)$$

$$= y(y - \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x + \sqrt{3}) \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

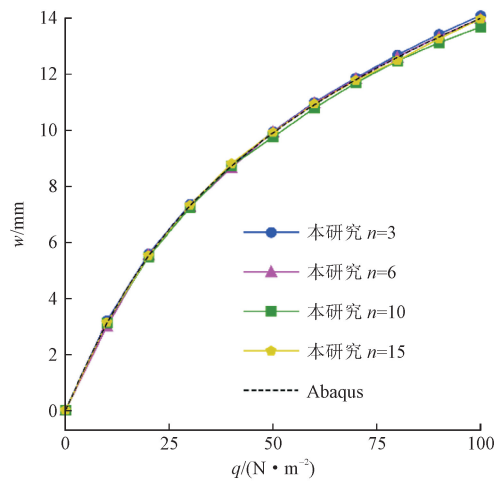
1,2 边简支,4 边固支,3 边自由(SFSC)

$$\varphi_w(x, y) = y \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (y - \sqrt{3}x)^2,$$

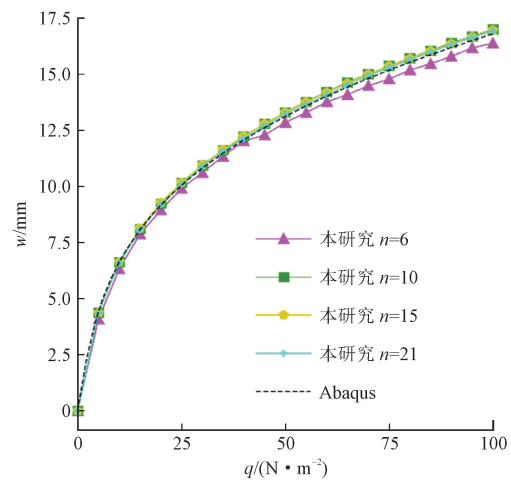
$$\varphi_u(x, y) = \varphi_v(x, y) = y(y - \sqrt{3}x) \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

对每一种边界工况,均采用不同多项式级数进行求解,图7展示了CCCC、SSSS、SCSC的中心点处以及SFSC自由边中点处的荷载-挠度曲线。对于CCCC,当采用一阶以上的多项式级数时($n=3, 6, 10, 15$),构

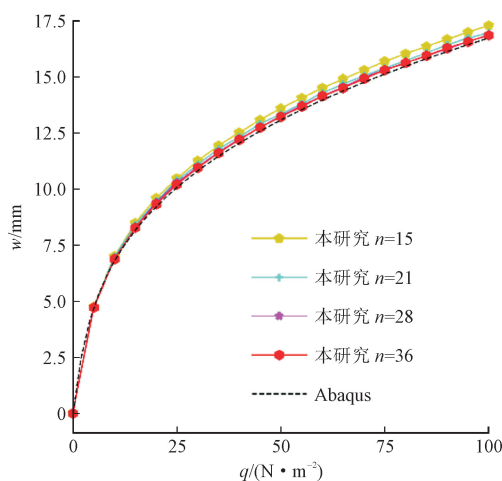
造的位移试函数能够较好地逼近真实的位移函数,所得结果与 Abaqus 解较为吻合;对于 SCSC,当采用三阶以上的多项式级数时($n=10, 15, 21$),解答较好地收敛于 Abaqus 解;对于 SSSS,当采用五阶以上的多项式级数时($n=21, 28, 36$),解答与 Abaqus 解吻合良好;对于 SFSC,当采用六阶以上的多项式级数时,解答与 Abaqus 解基本吻合。由此可知,随着边界条件愈加复杂,解答收敛所需的多项式级数次数越高。究其原因,本研究解法基于能量的弱形式解答,弱化了边界条件,当应力边界条件存在且较为复杂时,真实的位移函数的多项式级数的表达形式也愈加复杂,故此构造更高阶数的位移试函数方能更好地近似真实的位移函数。



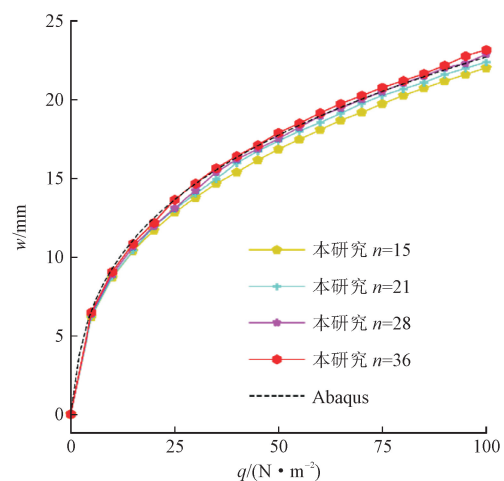
(a) CCCC



(b) SCSC



(c) SSSS



(d) SFSC

图7 不同边界工况下平行四边形薄板挠度的收敛性分析

Fig. 7 Convergence analysis of deflection of parallelogram thin plates under different boundary conditions

为了直观地展示不同阶次多项式级数解答的收敛性,以 SFSC 为例,表4列出了不同级数下的本研究

解、Abaqus 解及其相对误差。当 $n = 21, 28, 36$ 时, 相对误差均在 5% 范围之内; 随着 n 值不断增大(即多项

式级数阶数不断提高), 本研究解答整体上能够更好地逼近 Abaqus 解。

表 4 平行四边形薄板自由边中点挠度对比(SFSC)

Tab. 4 Comparison of the midpoint deflection of the free edge of a parallelogram thin plate(SFSC)

$q/(N \cdot m^{-2})$	挠度/mm					相对误差/%			
	Abaqus	$n = 15$	$n = 21$	$n = 28$	$n = 36$	$n = 15$	$n = 21$	$n = 28$	$n = 36$
20	12.41	11.63	11.88	11.88	12.24	-7.09	-4.27	-4.27	-1.37
40	16.25	15.31	15.89	16.12	16.22	-5.78	-2.22	-0.80	-0.18
60	18.86	17.98	18.45	18.88	18.95	-4.67	-2.17	0.11	0.48
80	20.89	20.16	20.58	20.93	21.33	-3.49	-1.48	0.19	2.11
100	22.60	21.91	22.27	22.78	23.06	-3.50	-1.46	0.80	1.95

4 讨论与分析

本研究所提出的算法流程与深度能量法基本一致, 主要区别在于模型的构建。神经网络模型能够表达极其复杂的函数, 理论上可以近似任意形式的函数, 但其内部的构造还有待研究; 而基于符号微分所搭建的多项式级数模型, 在求解薄板的大挠度弯曲问题上, 具有一定的适用性, 相对于神经网络解法的未知构造, 还能得到薄板位移函数显式的多项式级数表达式。此外, 基于符号微分求解位移的各项偏导相对于自动微分计算效率更高。以算例 2 中 $\bar{q}/9.1575 = 1$ 工况为例, 分别采用二次($n = 6$)、三次($n = 10$)、四次($n = 15$)多项式构造位移试函数学习率, $\alpha = 1 \times 10^{-3}$, 阈值 $\varepsilon = 1 \times 10^{-8}$ 。表 5 给出了本研究方法的计算时间和内存。随着多项式级数阶次的提高, 待优化参数的数量增加, 计算时间和内存整体增加。

表 5 本研究算法对计算时间和内存的影响

Tab. 5 The influence of the algorithm on computing time and memory

计算效率	$n = 6$	$n = 10$	$n = 15$
时间/s	5.60	6.35	10.69
内存/MB	162.53	164.03	166.10

5 结 论

本研究提出了一种基于深度学习技术的多项式级数方法, 求解薄板的几何非线性弯曲问题。基于变分原理的几何非线性弯曲理论, 建立了以系统势能为主的目标函数, 利用符号微分搭建位移函数及其导数的多项式级数模型, 快速计算系统势能中的位移及其

偏导项, 利用自动微分技术求解目标函数梯度, 进行参数优化, 最终求解出薄板的几何非线性弯曲的多项式级数解答。通过算例分析了不同几何形状、边界下薄板的非线性弯曲问题, 得到以下结论。

1) 本研究提出了一个基于自动微分与符号微分的数值模型, 同时本方法的求解过程与深度能量法一致, 不同之处在于本数值模型的内部采用多项式级数表达, 相比于采用神经网络, 该方法能得到一个显式的函数表达式, 其内部的运算简洁明了。通过不同的算例分析, 表明本研究解与 Abaqus 解、理论解、文献解吻合良好, 证明了本方法求解薄板线性和非线性弯曲问题的有效性和精确性。

2) 通过增加模型内部的级数阶次, 模型的拟合能力增强, 一般情况下, 较为低阶的多项式级数解答便能逼近真实的位移函数; 而存在自由边界时, 往往需要高阶的多项式级数才能收敛于实际位移。

3) 本研究的模型框架实现过程简单, 通过增加级数阶次即可获得较强的拟合能力, 且具有复用性, 可进一步拓展至其他力学问题的求解中。

参考文献:

- [1] 江涛, 额布日力吐. 相邻两边固支其余两边自由矩形正交各向异性薄板弯曲的辛叠加解[J]. 应用力学学报, 2020, 37(5): 2214-2221.
JIANG Tao, Eburilitu. Symplectic superposition solution for bending problem of orthotropic rectangular plate with two adjacent edges free and the others clamped[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020, 37(5): 2214-2221 (in Chinese).
- [2] 申国哲, 王瑞阳, 夏阳, 等. 基于近场动力学的薄板弯曲大变形及断裂分析[J]. 力学学报, 2023, 55(2): 381-389.
SHEN Guozhe, WANG Ruiyang, XIA Yang, et al. Large deformation and fracture analysis of thin plate bending based on peridynam-

- ics[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2023, 55(2):381-389(in Chinese).
- [3] MO T J, HUANG J, LI S B, et al. A spline finite point method for nonlinear bending analysis of FG plates in thermal environments based on a locking-free thin/thick plate theory[J]. Mathematical problems in engineering, 2020, 2020(1):2943705.
- [4] WATTS G, PRADYUMNA S, SINGHA M K. Nonlinear analysis of quadrilateral composite plates using moving kriging based element free Galerkin method[J]. Composite structures, 2017, 159:719-727.
- [5] 陈英杰, 宋小惠. 应用修正的功的互等法求解大挠度矩形薄板弯曲问题[J]. 塑性工程学报, 2018, 25(2):175-182.
CHEN Yingjie, SONG Xiaohui. Problem of the bending of large deflection rectangular thin plate solved by applying corrected reciprocal method[J]. Journal of plasticity engineering, 2018, 25(2):175-182(in Chinese).
- [6] ZHANG D G. Non-linear bending analysis of super elliptical thin plates[J]. International journal of non-linear mechanics, 2013, 55:180-185.
- [7] LI A Q, JI X, ZHOU S S, et al. Nonlinear axisymmetric bending analysis of strain gradient thin circular plate[J]. Applied mathematical modelling, 2021, 89, Part 1:363-380.
- [8] YU Q. A hierarchical wavelet method for nonlinear bending of materially and geometrically anisotropic thin plate[J]. Communications in nonlinear science and numerical simulation, 2021, 92:105498.
- [9] AL-SHUGAA M A, MUSA A E S, AL-GAHTANI H J, et al. Transversely loaded anisotropic composite plates undergoing large deflection[J]. Arabian journal for science and engineering, 2023, 48(4):5571-5586.
- [10] CHEN Y J, NIE W, GAO X D, et al. Analytical calculation of large deflection of annular thin plate of damping valve[J]. IOP conference series: materials science and engineering, 2020, 717(1):012009.
- [11] 曹天捷. 轴对称圆薄板大挠度微分方程的数值分析方法[J]. 应用力学学报, 2016, 33(3):427-433.
CAO Tianjie. A numerical method to the nonlinear differential equations of thin circular plates with large deflections[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2016, 33(3):427-433(in Chinese).
- [12] 张迅炜, 周建方, 徐吉良. 基于 Gröbner 基的圆薄板非线性大挠度分析[J]. 制造业自动化, 2013, 35(6):82-85.
ZHANG Xunwei, ZHOU Jianfang, XU Jiliang. Using Gröbner bases to analyze the nonlinear deflection of a thin circular plate[J]. Manufacturing automation, 2013, 35(6):82-85(in Chinese).
- [13] AGHELINEJAD M, ZARE K, EBRAHIMI F, et al. Nonlinear thermomechanical post-buckling analysis of thin functionally graded annular plates based on von-Karman's plate theory[J]. Mechanics of advanced materials and structures, 2011, 18(5):319-326.
- [14] 江福汝. 环形和圆形薄板在各种支承条件下的非对称非线性弯曲问题(I)[J]. 应用数学和力学, 1982, 3(5):629-640.
JIANG Furu. Unsymmetrical bending problems for the annular and circular thin plates under various supports(I)[J]. Applied mathematics and mechanics, 1982, 3(5):629-640(in Chinese).
- [15] 周次青. 正交各向异性矩形薄板的非线性弯曲[J]. 应用数学和力学, 1984, 5(3):419-436.
ZHOU Ciqing. Nonlinear bendings for the orthotropic rectangular thin plates under various supports[J]. Applied mathematics and mechanics, 1984, 5(3):419-436(in Chinese).
- [16] 杨天祥, 刘昭培, 罗定安. 用配点法解矩形薄板大挠度弯曲问题[J]. 天津大学学报, 1981(2):7-19.
YANG Tianxiang, LIU Zhaopei, LUO Ding'an. Solution of large deflection bending problem of rectangular plates by method of point collocation[J]. Journal of Tianjin University, 1981(2):7-19(in Chinese).
- [17] 陈子桀, 徐次达. 最小二乘配点法解薄板几何非线性弯曲问题[J]. 力学学报, 1983(5):522-526.
CHEN Ziqi, XU Cida. Analysis of geometrically nonlinear plate-bending problems by the least squares collocation method[J]. Acta mechanica Sinica, 1983(5):522-526(in Chinese).
- [18] 杨加明, 孙良新. Karman 型正交异性矩形薄板非线性弯曲的统一求解方法[J]. 力学季刊, 2002, 23(4):568-574.
YANG Jiaming, SUN Liangxin. A general method for nonlinear bending of von Karman-type orthotropic rectangular thin plates[J]. Chinese quarterly of mechanics, 2002, 23(4):568-574(in Chinese).
- [19] 武兰河, 李春雨. 任意四边形薄板大挠度弯曲问题研究[J]. 力学季刊, 2000, 21(3):322-326.
WU Lanhe, LI Chunyu. Bending analysis of arbitrary quadrilateral plates with large deflection[J]. Chinese quarterly of mechanics, 2000, 21(3):322-326(in Chinese).
- [20] 侯祥林, 郑夕健, 张良, 等. 薄板弯曲大变形高阶非线性偏微分方程推导与优化算法研究[J]. 物理学报, 2012, 61(18):9-18.
HOU Xianglin, ZHENG Xijian, ZHANG Liang, et al. Study on derivation and optimization algorithm about thin plate bending large deformation higher-order nonlinear partial differential equations[J]. Acta physica Sinica, 2012, 61(18):9-18(in Chinese).
- [21] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. Journal of computational physics, 2019, 378:686-707.
- [22] SIRIGNANO J, SPILIOPOULOS K. DGM: a deep learning algorithm for solving partial differential equations[J]. Journal of computational physics, 2018, 375:1339-1364.

- [23] SAMANIEGO E, ANITESCU C, GOSWAMI S, et al. An energy approach to the solution of partial differential equations in computational mechanics via machine learning: concepts, implementation and applications[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2020, 362:112790.
- [24] GOSWAMI S, ANITESCU C, CHAKRABORTY S, et al. Transfer learning enhanced physics informed neural network for phase-field modeling of fracture[J]. Theoretical and applied fracture mechanics, 2020, 106:102447.
- [25] YANG L, MENG X H, KARNIADAKIS G E. B-PINNs: Bayesian physics-informed neural networks for forward and inverse PDE problems with noisy data[J]. Journal of computational physics, 2021, 425:109913.
- [26] WANG Y Z, SUN J, LI W, et al. CENN: conservative energy method based on neural networks with subdomains for solving variational problems involving heterogeneous and complex geometries[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2022, 400:115491.
- [27] 唐明健, 唐和生. 基于物理信息的深度学习求解矩形薄板力学正反问题[J]. 计算力学学报, 2022, 39(1):120-128.
TANG Mingjian, TANG Hesheng. A physics-informed deep learning method for solving forward and inverse mechanics problems of thin rectangular plates[J]. Chinese journal of computational mechanics, 2022, 39(1):120-128(in Chinese).
- [28] 黄钟民, 谢臻, 张易申, 等. 面内变刚度薄板弯曲问题的挠度-弯矩耦合神经网络方法[J]. 力学学报, 2021, 53(9):2541-2553.
HUANG Zhongmin, XIE Zhen, ZHANG Yishen, et al. Deflection-bending moment coupling neural network method for the bending problem of thin plates with in-plane stiffness gradient[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2021, 53(9):2541-2553(in Chinese).
- [29] E W N, YU B. The deep ritz method: a deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems[J]. Communications in mathematics and statistics, 2018, 6(1):1-12.
- [30] ZHUANG X Y, GUO H W, ALAJLAN N, et al. Deep autoencoder based energy method for the bending, vibration, and buckling analysis of Kirchhoff plates with transfer learning[J]. European journal of mechanics-a/solids, 2021, 87:104225.
- [31] NGUYEN-THANH V M, ZHUANG X Y, RABCZUK T. A deep energy method for finite deformation hyperelasticity[J]. European journal of mechanics-a/solids, 2020, 80:103874.
- [32] 郭宏伟, 庄晓莹. 采用两步优化器的深度配点法与深度能量法求解薄板弯曲问题[J]. 固体力学学报, 2021, 42(3):249-266.
GUO Hongwei, ZHUANG Xiaoying. The application of deep collocation method and deep energy method with a two-step optimizer in the bending analysis of Kirchhoff thin plate[J]. Chinese journal of solid mechanics, 2021, 42(3):249-266(in Chinese).
- [33] 张纯, 罗金, 李登鹏. 基于深度神经网络的力学场量代理计算模型研究[J]. 应用力学学报, 2021, 38(2):552-559.
ZHANG Chun, LUO Jin, LI Dengpeng. Research on surrogate calculation model of mechanical quantity field based on neural network[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2021, 38(2):552-559(in Chinese).
- [34] 毛晓敏, 张慧华, 纪晓磊, 等. 基于 XFEM 与 BP 神经网络的裂纹智能识别[J]. 应用力学学报, 2022, 39(6):1158-1167.
MAO Xiaomin, ZHANG Huihua, JI Xiaolei, et al. Intelligent crack identification based on XFEM and BP neural network[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(6):1158-1167(in Chinese).
- [35] TIMOSHENKO S, WOINOWSKY-KRIEGER S. Theory of plates and shells[M]. New York: McGraw-Hill College, 1959.
- [36] 焦兆平, 吴长春, 卞学. Mindlin 板几何非线性分析的附加内部剪应变法[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(6):479-488.
JIAO Zhaoping, WU Changchun, BIAN Xue. Geometrically nonlinear analysis of Mindlin plate using the incompatible bending elements with internal shear strain[J]. Applied mathematics and mechanics, 1994, 15(6):479-488(in Chinese).

(编辑 李坤璐)