

DOI:10.20176/j.cnki.nxdz.20260504

层级社交网络中对立观点的竞争传播

马 艳¹, 陈志为², 马婧瑛^{1,3,4*}, 马劲轅⁵

(1. 宁夏大学数学统计学院, 宁夏 银川 750021; 2. 新加坡南洋理工大学 计算机与数据科学学院, 新加坡 639798;
3. 宁夏交叉力学与科学计算重点实验室, 宁夏 银川 750021; 4. 宁夏数学基础科学研究中心, 宁夏 银川 750021;
5. 中智绿能(宁夏)科技有限公司, 宁夏 银川 750001)

摘 要:针对层级社交网络中对立观点的竞争传播与共识形成问题,构建了基于平均场近似的离散时间观点动力学模型。首先,针对强连通有向网络,依据观点传播的初期与后期两个阶段分别建模:观点传播初期存在未接触观点的个体,据此建立三态传播动力学模型;传播后期观点充分扩散渗透,模型退化为二态竞争传播模型。理论分析证明了模型的适定性,并结合李雅普诺夫稳定性理论与非负矩阵理论,推导出单一观点形成“赢家通吃”效应的充分条件。进一步,将基础模型拓展至含决策层-从属层单向跨层影响的双层层级网络。理论分析表明,决策层的观点倾向、从属层的内部连接结构以及跨层影响强度,共同决定系统能否最终达成单一观点主导的“赢家通吃”稳态。特别地,当决策层与从属层的固有观点倾向存在分歧时,若跨层影响矩阵的范数超过临界阈值,则决策层的优势观点可彻底逆转从属层的原有舆论偏向,最终实现全网范围内的观点垄断。数值仿真结果验证了理论条件的正确性与模型的有效性,同时表明,合理调控层间作用强度,可有效引导网络舆论向预期方向演化。

关键词:观点动力学;非线性系统;层级网络;竞争传播;李雅普诺夫稳定性理论

分类号:(中图)O193;TP18

文献标志码:A

在复杂网络科学快速发展的背景下,观点传播动力学已成为分析社会共识形成、舆情演变与信息扩散的重要理论工具。尤其在当下社交媒体环境中,对立观点的共存与博弈,已成为网络舆论场的典型特征^[1-2]。现阶段学界已构建多种经典观点动力学模型,整体可划分为二元交互模型与群体动力学模型两大类:前者多依托博弈论分析个体在两种对立立场间的决策选择行为^[3-4];后者又可细分为离散模型与连续模型,其中离散模型以 Sznajd 模型^[5]、Ising 模型^[6-7]、投票者模型^[8]为代表,连续模型主要包括 H-K 模型^[9]、D-W 模型^[10]、DeGroot 模型^[11]。上述模型大多刻画个体参考邻居观点,依托多数规则、社会学习等机制完成观点更新的演化过程。此外,观点传播与病毒传播^[12-13]具备高度相似的扩散机理,由此启发了研究者借鉴经典的传染病模型(如 SIS^[14]、SEIRS 模型^[15]等),刻画竞争性观点的相互作用与动态传播规律。Wang 等^[16]将信任机制引入 SIR 模型探究谣言扩散规律,融入贴合社交心理的社会作用机制;Zhang 等^[17]基于 SIS 模型框架,剖析网络拓扑结构对观点传播过程的影响;Guo 等^[18]引入媒体干预等外部影响因素,构建融合媒体报道的 SIS 随机传播模型,并验证了基本再生数 R 可有效调控随机网络中的信息传播态势。现有研究充分验证了传染病模型应用于观点传播研究的可行性与有效性,但多数研究仍局限于均匀混合网络或静态网络假设,难以精准刻画真实社交网络的复杂结构特征。

现实社会关系具备内在的多重性与层级性:个体往往同时嵌入多重社交圈层,涵盖线上社群、线下同事圈、亲属网络等,不同圈层的连接模式与影响强度通常存在显著差异。在此背景下,多层网络与层级网络理

收稿日期:2026-02-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61963032);银川市科技创新领军人才培养项目(2023LJRC04);2024 年宁夏博士创新站项目资助;宁夏自然科学基金资助项目(2021AAC03004)

作者简介:马艳(2000—),女,硕士研究生,主要从事复杂系统建模与分析研究,(电子信箱)18209639019@163.com。

* 通信联系人:马婧瑛(1980—),女,教授,博士,主要从事演化博弈、复杂系统与多智能体系统研究,(电子信箱)jymagic@nxu.edu.cn。

引用格式:马艳,陈志为,马婧瑛,等.层级社交网络中对立观点的竞争传播[J].宁夏大学学报(自然科学版中英文),2026,47(3):225-239.

论逐步发展完善,成为刻画与解析复杂社会系统的重要分析框架。其中,多层网络通过构建不同网络层级表征社交系统中的多元关系类型,每一层级对应一类特定的社会联结关系;层级网络则重点刻画节点间的非对称影响关系,例如企业组织中的上下级关系,可有效分析影响力沿社会结构自上而下或自下而上的传导规律,进而促使不同层级之间的观点趋于一致^[19]。

针对该类特殊网络结构的观点动力学研究已取得诸多进展:Choi等^[20]探究了多层网络下的多数投票演化过程,发现共识的形成及收敛速度高度依赖层间耦合规则与网络噪声强度;Fang等^[21]融合流行病传播与观点竞争机制,揭示了健康行为观念与疾病传播在多层网络结构中的交互作用规律。此外,面向军事层级网络^[22]和社会阶层结构^[23]等特殊层级系统的研究表明,节点层级地位、节点连接方式及跨层影响机制,对舆论共识的演化与形成具有决定性作用。Li等^[24]研究发现,共识达成时间受网络同质性参数与观点初始偏见的共同调控:无初始偏见条件下,随机网络更易形成全局共识;存在初始偏见时,层级网络的共识凝聚效率更高。

然而,现阶段针对层级拓扑结构下竞争观点动力学的系统性研究仍较为匮乏。尤其在层级深度、层间连接强度与观点竞争规则三者的交互作用,及其对系统宏观演化行为的影响机制方面,现有研究仍有待深入挖掘。鉴于此,文中构建双层层级网络下的离散时间观点动力学模型并开展动力学分析,重点探究跨层非对称影响在竞争观点扩散与群体共识形成过程中的内在作用机理。

相较于现有研究,本文的主要创新与贡献如下:①分别针对观点传播的初期与演化后期进行分段建模,推导出观点“赢家通吃”状态的实现充分条件;②求解得到跨层影响逆转从属层观点倾向的临界阈值解析表达式;③结合数值仿真实验,厘清网络拓扑特征与关键参数对观点实现“赢家通吃”演化结果的影响规律。本研究成果可为层级网络环境下的舆情演化分析与舆论正向引导提供理论支撑与参考依据。

符号说明:对于任意正整数 n ,记 $[n]=\{1,2,\dots,n\}$ 。设 $a,b\in\mathbb{R}^n$,若 $a_i\geq b_i$ 对所有 $i\in[n]$ 成立,则记为 $a\geq b$;类似地,对矩阵 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$,若 $A_{ij}\geq B_{ij}$ 对所有 $i,j\in[n]$ 成立,则记为 $A\geq B$ 。对向量 $x=(x_1,\dots,x_n)^T$,记 $\text{diag}(x)$ 表示以 x 的元素为对角线元素的对角矩阵。对矩阵 $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$,记 $s(M)$ 为其特征值中实部的最大值。

1 问题的提出

现实社交网络中多观点的竞争传播,其演化结果存在两种典型格局:一种是呈现“赢家通吃”效应,即某一观点被绝大多数个体采纳,而对立观点逐步消退;另一种则是多种观点长期共存。在市场营销、舆情引导、热点事件处置等实际场景中,“赢家通吃”现象尤为普遍,其形成机制与观点传播的不同阶段密切相关:传播初期,个体尚未接触多元观点,易被率先接触的单方信息所吸引;传播后期,多元观点全面浮现,个体通过综合权衡主动调整自身观点倾向。因此,探究不同传播阶段下“赢家通吃”效应的实现条件,是理解社会共识形成机制的重要基础。此外,层级网络中的“赢家通吃”现象表现得更为典型,其形成过程与非对称跨层影响存在紧密关联,但现有研究尚未构建系统的理论模型对其进行解析。

为此,研究聚焦以下核心问题:第一,在观点传播的不同阶段,竞争性观点如何动态演化?满足哪些条件能够实现“赢家通吃”?第二,在具备单向跨层影响的层级社交网络中,非对称影响机制如何塑造观点竞争的最终稳态格局?为开展后续理论分析,首先对“赢家通吃”效应给出严格定义。

定义 1 设一个包含 n 个社群的社交网络中存在若干观点,记 $x^k\in[0,1]^n$ 为 k 时刻各社群中支持某一观点的比例向量。若该观点在所有社群的支持比例均趋于100%,即 $\lim_{k\rightarrow\infty}x^k=1_n$,则称该观点在社交网络中实现“赢家通吃”效应。

2 无层级社交网络中的观点传播

考虑一个由 n 个社群构成的社交网络,每个社群包含若干个体,社群内个体连接紧密。用强联通有向图 $G=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 表示这个社群,其中 $\mathcal{V}=[n]$ 表示社群集合,边集 $\mathcal{E}=\{(i,j)|i,j\in\mathcal{V}\text{且}i\neq j\}$ 表示社群间的连接关系。假设围绕某一特定议题有存在两种相互对立的观点(分别记作 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$)在该社交网络中传播。

2.1 传播初期:观点尚未充分传播

2.1.1 模型建立 假设在信息扩散初期,两类观点尚未覆盖全网。此时依据立场差异,可将网络个体分为 3 类:无明确观点的中立状态 $\mathcal{S}$ 、支持观点 $\mathcal{L}$ 与支持观点 $\mathcal{R}$ 。图 1 刻画了单一社群内个体观点状态的马尔可夫转移过程。在任意时刻,个体受邻居信息接触行为的影响,依照图 1 马尔可夫链规则,在 $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L}$ 、 $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ 、 $\mathcal{L} \leftrightarrow \mathcal{R}$ 三类状态间完成切换;图中各转移箭头旁依次标注了转移影响参数 α_{ij} 、 β_{ij} 、 γ_{ij} 与 λ_{ij} (各参数具体示意详见表 1),且状态转移速率与邻居群体中对应观点的占比呈正比。借鉴 Zhang 等^[25]提出的病毒式传播平均场分析框架,将每个社群抽象为全连接超级节点,以社群内持有 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{R}$ 立场的个体占比作为宏观状态变量,进而实现从微观个体观点切换行为,到社群层面观点竞争与扩散宏观动力学过程的建模刻画。该近似方法适用于社群内部连接稠密、社群间连接稀疏的层级化网络结构,模型误差处于可控范围。

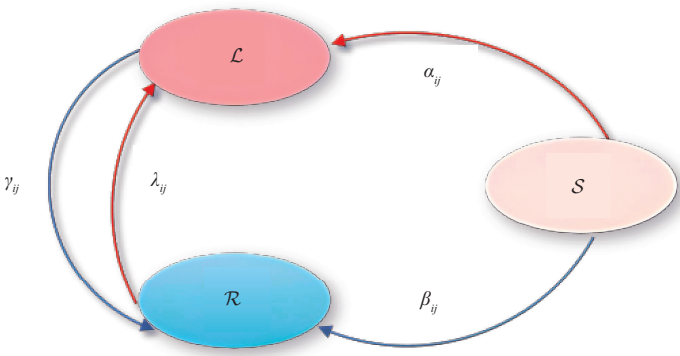


图 1 观点传播初期个体的状态转移图

Fig. 1 State transition diagram of individuals in the early stage of opinion propagation

表 1 观点传播模型的影响参数定义

Tab. 1 Definitions of influencing parameters for the opinion propagation model

参数	状态转移	物理意义
α_{ij}	$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L}$	社群 j 促使社群 i 中未形成观点的个体采纳观点 $\mathcal{L}$ 的影响强度
β_{ij}	$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$	社群 j 促使社群 i 中未形成观点的个体采纳观点 $\mathcal{R}$ 的影响强度
λ_{ij}	$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L}$	社群 j 促使社群 i 中已支持 $\mathcal{R}$ 的个体转而支持 $\mathcal{L}$ 的影响强度
γ_{ij}	$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}$	社群 j 促使社群 i 中已支持 $\mathcal{L}$ 的个体转而支持 $\mathcal{R}$ 的影响强度

具体地,令 $x_i(t)$ 和 $y_i(t)$ 分别表示 t 时刻社群 i 中支持观点 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{R}$ 的个体比例。相应地, $z_i(t) = 1 - x_i(t) - y_i(t)$ 表示社群 i 中尚未形成明确观点的个体比例。在社交互动过程中,个体观点状态会受邻居节点的信息影响发生状态转移。沿用 Zhang 等^[25]的建模框架,构建连续时间观点动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = (1 - x_i(t) - y_i(t)) \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} x_j(t) + y_i(t) \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} x_j(t) - x_i(t) \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij} y_j(t), \\ \dot{y}_i(t) = (1 - x_i(t) - y_i(t)) \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} y_j(t) + x_i(t) \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij} y_j(t) - y_i(t) \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} x_j(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $N_i = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 为社群 i 的邻居集。

对式(1)进行欧拉离散化处理,可得离散时间观点传播模型为

$$\begin{cases} x_i^{k+1} = x_i^k + h(1 - x_i^k - y_i^k) \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} x_j^k + h y_i^k \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} x_j^k - h x_i^k \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij} y_j^k, \\ y_i^{k+1} = y_i^k + h(1 - y_i^k - x_i^k) \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} y_j^k + h x_i^k \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij} y_j^k - h y_i^k \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} x_j^k. \end{cases}$$

其中: $h(>0)$ 为时间步长;上标 k 表示离散时间步。定义状态向量 $\mathbf{x}^k = [x_1^k, \dots, x_n^k]^T$, $\mathbf{y}^k = [y_1^k, \dots, y_n^k]^T$ 和 $\mathbf{z}^k = \mathbf{I}_n - \mathbf{x}^k - \mathbf{y}^k$,可得上述观点传播模型的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{k+1} \\ \mathbf{y}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n + h\mathbf{Z}^k \mathbf{A} + h\mathbf{Y}^k \mathbf{\Lambda} & -h\mathbf{X}^k \mathbf{\Gamma} \\ -h\mathbf{Y}^k \mathbf{\Lambda} & \mathbf{I}_n + h\mathbf{Z}^k \mathbf{B} + h\mathbf{X}^k \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{y}^k \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中: $X^k = \text{diag}(x^k)$, $Y^k = \text{diag}(y^k)$, $Z^k = \text{diag}(z^k)$, $A = [\alpha_{ij}]_{n \times n}$, $B = [\beta_{ij}]_{n \times n}$, $\Lambda = [\lambda_{ij}]_{n \times n}$ 及 $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{n \times n}$.

2.1.2 模型的适定性 由于模型以各社群内不同观点支持者的个体比例为状态变量, 初始状态自然满足

$x_i^0, y_i^0 \in [0, 1]$ 且 $x_i^0 + y_i^0 \leq 1$ 。据此定义集合 $\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix} \middle| x^k, y^k \geq 0_n \text{ 且 } x^k + y^k \leq 1_n, k \geq 0 \right\}$ 。结合观点传播

的先入为主特征^[26], 即相较于转变个体已固化的固有立场, 说服无稳定观点的中立个体接受某一立场的难度更低。据此, 在构建系统(2)时, 引入如下基本假设。

假设 1 对于节点 $i, j \in \mathcal{V}$, 有 $\lambda_{ij} \leq \alpha_{ij}$ 和 $\gamma_{ij} \leq \beta_{ij}$ 成立。

定理 1 若假设 1 成立且采样参数满足 $0 < h \leq 1 / \max_{i \in [n]} \left(\sum_{j \in N_i} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \right)$, 则集合 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{G}$ 观点传播系统(2)

的正不变集。进一步地, 若初始状态 $\begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x^k + y^k) = 1_n$ 。

证明 首先, 已知对于所有的 $k > 0$ 和 $i \in [n]$, 有 $x_i^k + y_i^k \leq 1$ 成立。由于 $z_i^k = 1 - x_i^k - y_i^k$, 可得

$$z_i^{k+1} = z_i^k - h z_i^k \sum_{j \in N_i} (\alpha_{ij} x_j^k + \beta_{ij} y_j^k). \quad (3)$$

易证 $z_i^{k+1} \leq z_i^k \leq 1$ 。又因为 $x_i^k, y_i^k \in [0, 1]$, 进一步推得 $z_i^{k+1} \geq z_i^k \left(1 - h \sum_{j \in N_i} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \right)$ 。结合 h 的约束条件, 可

得 $z_i^{k+1} \geq 0$, 即对所有 $k > 0$ 和 $i \in [n]$, 有 $x_i^{k+1} + y_i^{k+1} \leq 1$ 。其次, $x_i^{k+1} \geq x_i^k \left(1 - h \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij} \right) \geq 0$, 其中不等式成

立是因为 $h \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij} < h \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} < 1$ 。此外, 还有 $x_i^{k+1} \leq x_i^k + h z_i^k \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} + h y_i^k \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} \leq z_i^k + x_i^k + y_i^k = 1$ 成立。因

此, 对任意 $i \in [n]$, 都有 $x_i^{k+1} \in [0, 1]$ 。同理, 对 y_i^{k+1} 进行相同分析, 可得 $y_i^{k+1} \geq y_i^k \left(1 - h \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} \right) \geq 0$ 且 $y_i^{k+1} \leq$

$y_i^k + h z_i^k \sum_{j \in N_i} \beta_{ij} + h x_i^k \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij} \leq y_i^k + x_i^k + z_i^k = 1$ 。综上, $\mathcal{F}$ 为系统(2)的正不变集。

由于 $z_i^k \in [0, 1]$ 且 $z_i^{k+1} \leq z_i^k$, $\{z_i^k\}$ 为单调有界序列, 其极限存在, 记 $\lim_{k \rightarrow \infty} z_i^k = z_i^*$ 。设 $z^* = [z_1^*, \dots, z_n^*]^T \neq 0_n$,

则存在 i_1 使 $z_{i_1}^* > 0$ 。对式(3)取极限, 可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j \in N_{i_1}} (\alpha_{i_1 j} x_j^k + \beta_{i_1 j} y_j^k) \right) = 0$ 。由于 $\alpha_{i_1 j}, \beta_{i_1 j} \geq 0$ 且序列 x_j^k, y_j^k 均有

界, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{i_1 j} x_j^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{i_1 j} y_j^k = 0$ 。若对任意 j 均有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_j^k = 0$, 则进一步推得 $\lim_{k \rightarrow \infty} z_j^k = 1$ 。对任意 $j \in N_{i_1}$

重复上述推导, 可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} z_l^k = 1, l \in N_{j_1}$ 。结合 $\mathcal{G}$ 的强连通性, 从节点 i_1 出发可抵达任意节点 $j \in \mathcal{V}$ 。沿有向路

径逐次递推可知, 对任意 $i \in \mathcal{V}$, 均满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} z_i^k = 1$ 。该结论与 $z^* \neq 0$ 及序列 $\{z_i^k\}$ 单调不减的前提相矛盾。因此必有 $z^* = 0_n$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i^k + y_i^k) = 1, \forall i$, 等价于 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x^k + y^k) = 1_n$ 。证毕。

定理 1 表明, 在强连通有向网络中, 依托节点间的社交互动, 两类对立观点可在网络内实现全域传播。具体而言, 对于 $\mathcal{G}$ 中任意社群 i 均满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i^k + y_i^k) = 1$, 这说明随着迭代演化, 两种观点将在网络中充分传播。当 $k \rightarrow \infty$ 时, 网络内不再存在处于中立未表态状态 S 的个体。

2.1.3 观点实现“赢家通吃” 本小节旨在探究观点在社交网络 $\mathcal{G}$ 上实现“赢家通吃”的充分条件。为此, 首先引入一个非负矩阵相关引理。

引理 1^[27] 设 M 为不可约非负矩阵。若 $s(M) = 1$, 则存在正定对角矩阵 P 使得 $M^T P M - P$ 半负定; 若 $s(M) < 1$, 则存在正定对角矩阵 P 使得 $M^T P M - P$ 负定。

定理 2 当假设 1 成立时, 对于系统(2)可得如下结论: 若 $(\Gamma - \Lambda)$ 为非负矩阵, 则观点 $\mathcal{R}$ 在社交网络 $\mathcal{G}$ 中实现“赢家通吃”; 若 $(\Lambda - \Gamma)$ 为非负矩阵, 则观点 $\mathcal{L}$ 在社交网络 $\mathcal{G}$ 中实现“赢家通吃”。

证明 首先, 证明观点 $\mathcal{R}$ 实现“赢家通吃”的情形。由 $z^k = 1_n - x^k - y^k$, 可将系统(2)等价改写为

$$\begin{cases} x^{k+1} = N_1 x^k - h E^k x^k + h g(x^k, z^k), \\ z^{k+1} = N_2 z^k - h \text{diag}(A x^k) z^k + h f(x^k, z^k). \end{cases} \quad (4)$$

其中: $N_1 = I_n + h \Gamma - h \text{diag}(\Gamma I_n)$; $N_2 = I_n - h \text{diag}(B I_n)$; $E^k = (I_n - X^k)(\Gamma - \Lambda)$;

$$g(x^k, z^k) = Z^k (A - \Lambda) x^k + X^k \Gamma z^k, \quad f(x^k, z^k) = Z^k B (x^k + z^k), \quad (5)$$

函数 g 和 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续可微,且满足 $g(\mathbf{x}^k, 0_n) = f(\mathbf{x}^k, 0_n) = 0_n$ 。

由于社交网络 $\mathcal{G}$ 为强连通有向图, $\mathbf{\Gamma}$ 是不可约矩阵,且 $\text{diag}(\mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_n)$ 为图 $\mathcal{G}$ 对应的拉普拉斯矩阵,其最小特征值为 0,因此 $s(N_1) = 1$ 。此外, N_2 为正对角阵且对角元素均小于 1,故 $s(N_2) < 1$ 。根据引理 1,存在正定对角阵 P_1 和 P_2 ,使得 $N_1^T P_1 N_1 - P_1$ 为半负定的, $N_2^T P_2 N_2 - P_2$ 是负定的。据此构造李雅普诺夫函数 $V^k = (\mathbf{x}^k)^T P_1 \mathbf{x}^k + (\mathbf{z}^k)^T P_2 \mathbf{z}^k$ 并分两步进行分析。

首先,根据矩阵 $(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{A})$ 的非负性与 $N_2^T P_2 N_2 - P_2$ 的负定性,可得

$$(\mathbf{z}^{k+1})^T P_2 \mathbf{z}^{k+1} - (\mathbf{z}^k)^T P_2 \mathbf{z}^k \leq (\mathbf{z}^k)^T (N_2^T P_2 N_2 - P_2) \mathbf{z}^k + 2h(\mathbf{z}^k)^T N_2^T P_2 \mathbf{f} + h^2 \mathbf{f}^T P_2 \mathbf{f} + h^2 (\mathbf{z}^k)^T \text{diag}(\mathbf{A} \mathbf{x}^k) P_2 \text{diag}(\mathbf{A} \mathbf{x}^k) \mathbf{z}^k。$$

其次,由 $N_1^T P_1 N_1 - P_1$ 的半负定性,还可得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}^{k+1})^T P_1 \mathbf{x}^{k+1} - (\mathbf{x}^k)^T P_1 \mathbf{x}^k \leq \\ & -h(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{I}_n - h \text{diag}(\mathbf{\Gamma} \mathbf{I}_n) + h \mathbf{\Gamma})^T P_1 \mathbf{E}^k \mathbf{x}^k + h^2 (\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{E}^k)^T P_1 \mathbf{E}^k \mathbf{x}^k + 2h(\mathbf{x}^k)^T N_1^T P_1 \mathbf{g} + h^2 \mathbf{g}^T P_1 \mathbf{g} \leq \\ & -h^2 (\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{A} + \mathbf{X}^k (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{A}))^T P_1 \mathbf{E}^k \mathbf{x}^k + 2h(\mathbf{x}^k)^T N_1^T P_1 \mathbf{g} + h^2 \mathbf{g}^T P_1 \mathbf{g} \leq \\ & 2h(\mathbf{x}^k)^T N_1^T P_1 \mathbf{g} + h^2 \mathbf{g}^T P_1 \mathbf{g}。 \end{aligned}$$

结合上述两步分析,可进一步讨论系统(4)的稳定性,有

$$\Delta V \leq (\mathbf{z}^k)^T (N_2^T P_2 N_2 - P_2) \mathbf{z}^k + K(h, \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k), \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} K(h, \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k) = & 2h(\mathbf{z}^k)^T N_2^T P_2 \mathbf{f} + h^2 \mathbf{f}^T P_2 \mathbf{f} + h^2 (\mathbf{z}^k)^T \text{diag}(\mathbf{A} \mathbf{x}^k) P_2 \text{diag}(\mathbf{A} \mathbf{x}^k) \mathbf{z}^k + \\ & 2h(\mathbf{x}^k)^T N_1^T P_1 \mathbf{g} + h^2 \mathbf{g}^T P_1 \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (7)$$

函数 $K: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 连续可微,且满足 $K(h, \mathbf{x}^k, 0_n) = 0$ 。由于 $N_2^T P_2 N_2 - P_2$ 为负定矩阵,必存在常数 $\zeta > 0$,使得 $(\mathbf{z}^k)^T (N_2^T P_2 N_2 - P_2) \mathbf{z}^k \leq -\zeta \|\mathbf{z}^k\|^2$ 。对于给定的数 $-\zeta \|\mathbf{z}^k\|^2$,存在常数 $\delta > 0$ 与正整数 N ,使得当 $k > N$ 且 $\|\mathbf{z}^k\| < \delta$ 时,有 $K(h, \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k) < \zeta \|\mathbf{z}^k\|^2$ 。由此,可推得系统(4)的状态满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{z}^k \end{bmatrix} = 0_{2n}$ 。根据定理 1,进一步得到 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}^k = \mathbf{1}_n$,即观点 $\mathcal{R}$ 在社交网络 $\mathcal{G}$ 中实现“赢家通吃”效应。条件 $(\mathbf{A} - \mathbf{\Gamma}) \geq 0$ 与 $(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{A}) \geq 0$ 互为对偶。因此采用完全平行的推导过程,可同理证得当 $(\mathbf{A} - \mathbf{\Gamma})$ 为非负矩阵时,观点 $\mathcal{L}$ 在社交网络 $\mathcal{G}$ 中实现“赢家通吃”效应。证毕。

2.2 传播后期:观点已充分传播

2.2.1 模型建立 在传播后期,观点 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{R}$ 已实现全网渗透,所有个体均充分知晓两类竞争观点,中立状态 S 的个体比例恒为零,即 $z_i(0) = 0$ 。此时,个体仅在立场 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{R}$ 之间动态权衡、自发切换。根据式(2)可得 $\dot{z}_i(t) = 0$,进而有 $z_i(t) \equiv 0$ 。因此,2.1节中描述传播初期的三态模型(2)退化为仅包含 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 的双观点竞争模型。结合式(2)可直接推导出离散时间观点传播方程为

$$\begin{cases} x_i^{k+1} = x_i^k + h y_i^k \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} x_j^k - h x_i^k \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij} y_j^k, \\ y_i^{k+1} = y_i^k + h x_i^k \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij} y_j^k - h y_i^k \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} x_j^k, \end{cases} \quad (8)$$

其对应的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{k+1} \\ \mathbf{y}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n + h \mathbf{Y}^k \mathbf{A} & -h \mathbf{X}^k \mathbf{\Gamma} \\ -h \mathbf{Y}^k \mathbf{A} & \mathbf{I}_n + h \mathbf{X}^k \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{y}^k \end{bmatrix}。 \quad (9)$$

系统(9)描述了社交网络中观点充分传播后,竞争观点在社群间的传播动态。

2.2.2 模型的适定性

定理 3 在假设 1 成立的前提下,集合 $\mathcal{F}$ 为系统(9)的正不变集。

证明 证明思路与定理 1 完全一致,此处从略。

2.2.3 观点实现“赢家通吃” 本小节针对初始时刻两类竞争观点同步在社交网络 $\mathcal{G}$ 中传播的情况进行分析,因此在集合 $\mathcal{F}_{co} = \mathcal{F} \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0_n \\ \mathbf{1}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ 0_n \end{bmatrix}, 0_{2n} \right\}$ 上讨论观点的演化规律。在假设 1 成立的条件下,对于系统(9),

若初始向量 $\begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}_\infty$, 则定理 2 的结论仍然成立。特别地, 当矩阵满足 $\mathbf{A} - \mathbf{F} \geq 0$ 时, 通过构造结构形式一致的李雅普诺夫函数, 并沿用前文分析框架, 可严格证明: 系统(9)将全局渐近收敛于 $\begin{bmatrix} 1_n \\ 0_n \end{bmatrix}$, 观点 $\mathcal{L}$ 在社交网络 $\mathcal{G}$ 中实现“赢家通吃”效应。

3 具有层级网络结构的观点传播

3.1 双层网络结构与观点动态模型

为刻画现实社交系统中普遍存在的非对称影响与观点共识演化过程, 本节构建一类包含决策层与从属层的双层网络模型。

决策层为由 m 个社群构成的强连通网络, 记作有向图 $\mathcal{G}_1$ 。记决策层中社群 i 的邻居集为 $N_i^1 = \{j \in \mathcal{V}_1 | (j, i) \in \mathcal{E}_1\}$ 。决策层表征观点充分扩散后的成熟社群, 层内个体均已明确持有 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 单一立场。其内部观点演化遵循第 2.2 节传播后期的动力学模型(式(8))。

从属层为由 n 个社群组成的强连通网络, 记作有向图 $\mathcal{G}_2$ 。该层处于观点传播初期, 层内多数个体尚未形成明确立场。网络结构上, 层内连接紧密、层间连接稀疏, 且仅存在从决策层向从属层的单向信息传播, 层间连边集合定义为 $\mathcal{E}_{12} = \{(i, j) | i \in \mathcal{V}_1, j \in \mathcal{V}_2\}$ 。在该框架下, 从属层的观点演化受层内个体交互与自上而下的非对称跨层作用共同驱动。据此, 对任意社群 $i \in \mathcal{V}_2$, 将其邻居分为两类: 层内邻居 $N_i^2 = \{j \in \mathcal{V}_2 | (j, i) \in \mathcal{E}_2\}$ 和跨层外部邻居 $N_i^{21} = \{j \in \mathcal{V}_1 | (j, i) \in \mathcal{E}_{12}\}$ 。

为明确区分不同层级及跨层耦合的影响机制, 记决策层社群 i 内观点 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 的支持者比例分别为 $p_i(t)$ 与 $q_i(t)$; 沿用前文记号, 以 $x_i(t)$ 和 $y_i(t)$ 分别表示从属层社群 i 中持有观点 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 的个体比例, $z_i(t)$ 为中立未表态个体比例。将调控观点状态转移的相关参数按作用范围分为层内影响参数与跨层影响参数两类, 各参数具体定义见表 2。

表 2 模型参数按作用范围分类

Tab. 2 Classification of model parameters by scope

参数类别	作用范围	参数符号
层内影响参数	决策层内部	$\alpha_{ij}^{(1)}, \beta_{ij}^{(1)}, \gamma_{ij}^{(1)}, \lambda_{ij}^{(1)}$
	从属层内部	$\alpha_{ij}^{(2)}, \beta_{ij}^{(2)}, \gamma_{ij}^{(2)}, \lambda_{ij}^{(2)}$
跨层影响参数	决策层 $\rightarrow$ 从属层	$\alpha_{ij}^{(21)}, \beta_{ij}^{(21)}, \gamma_{ij}^{(21)}, \lambda_{ij}^{(21)}$

注: 各参数所对应的具体状态转移过程及其物理意义详见表 1。

基于上述参数体系与状态变量设定, 沿用病毒传播动力学的平均场建模思路, 建立从属层兼顾层内交互与跨层耦合影响的连续时间观点传播动力学方程。即

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = (1 - x_i(t) - y_i(t)) \sum_{j \in N_i^1} \alpha_{ij}^{(2)} x_j(t) + y_i(t) \sum_{j \in N_i^2} \lambda_{ij}^{(2)} x_j(t) - x_i(t) \sum_{j \in N_i^2} \gamma_{ij}^{(2)} y_j(t) + \\ \quad (1 - x_i(t) - y_i(t)) \sum_{j \in N_i^{21}} \alpha_{ij}^{(21)} p_j(t) + y_i(t) \sum_{j \in N_i^{21}} \lambda_{ij}^{(21)} p_j(t) - x_i(t) \sum_{j \in N_i^{21}} \gamma_{ij}^{(21)} q_j(t), \\ \dot{y}_i(t) = (1 - x_i(t) - y_i(t)) \sum_{j \in N_i^2} \beta_{ij}^{(2)} y_j(t) + x_i(t) \sum_{j \in N_i^2} \gamma_{ij}^{(2)} y_j(t) - y_i(t) \sum_{j \in N_i^2} \lambda_{ij}^{(2)} x_j(t) + \\ \quad (1 - x_i(t) - y_i(t)) \sum_{j \in N_i^{21}} \beta_{ij}^{(21)} q_j(t) + x_i(t) \sum_{j \in N_i^{21}} \gamma_{ij}^{(21)} q_j(t) - y_i(t) \sum_{j \in N_i^{21}} \lambda_{ij}^{(21)} p_j(t). \end{cases}$$

令 $\mathbf{p}^k = [p_1^k, p_2^k, \dots, p_m^k]^T$ 和 $\mathbf{q}^k = [q_1^k, q_2^k, \dots, q_m^k]^T$, 可得从属层观点传播模型的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{k+1} \\ \mathbf{y}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n + h\mathbf{Z}^k \mathbf{A}_2 + h\mathbf{Y}^k \mathbf{A}_2 & -h\mathbf{X}^k \mathbf{F}_2 \\ -h\mathbf{Y}^k \mathbf{A}_2 & \mathbf{I}_n + h\mathbf{Z}^k \mathbf{B}_2 + h\mathbf{X}^k \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{y}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\mathbf{Z}^k \mathbf{A}_{21} + h\mathbf{Y}^k \mathbf{A}_{21} & -h\mathbf{X}^k \mathbf{F}_{21} \\ -h\mathbf{Y}^k \mathbf{A}_{21} & h\mathbf{Z}^k \mathbf{B}_{21} + h\mathbf{X}^k \mathbf{F}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^k \\ \mathbf{q}^k \end{bmatrix}. \quad (10)$$

其中: $\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{F}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $\mathbf{A}_{21}, \mathbf{B}_{21}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{F}_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 。

由此,完整双层网络可表示为图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$,其中顶点集 $\mathcal{V}=\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2$,边集 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2\cup\mathcal{E}_{12}$ 。若某一社群内支持观点 $\mathcal{L}$ (或 $\mathcal{R}$)的个体比例超过 50%,则称该社群倾向于观点 $\mathcal{L}$ (或 $\mathcal{R}$)。该层级网络的拓扑结构与各层个体观点状态转移示意图见图 2。双层网络上的全局观点传播动力学可统一写为分块矩阵迭代形式,即

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ p^{k+1} \\ q^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^k & \Phi_{12}^k \\ 0 & \Phi_{21}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \\ p^k \\ q^k \end{bmatrix} \quad (11)$$

令 $P^k = \text{diag}(p^k)$, $Q^k = \text{diag}(q^k)$, Λ_1 及 $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$,各分块矩阵的具体表达式分别为

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^k &= \begin{bmatrix} I_n + hZ^k A_2 + hY^k \Lambda_2 & -hX^k \Gamma_2 \\ -hY^k \Lambda_2 & I_n + hZ^k B_2 + hX^k \Gamma_2 \end{bmatrix}, \\ \Phi_{12}^k &= \begin{bmatrix} hZ^k A_{21} + hY^k \Lambda_{21} & -hX^k \Gamma_{21} \\ -hY^k \Lambda_{21} & hZ^k B_{21} + hX^k \Gamma_{21} \end{bmatrix}, \\ \Phi_{21}^k &= \begin{bmatrix} I_m + hQ^k \Lambda_1 & -hP^k \Gamma_1 \\ -hQ^k \Lambda_1 & I_m + hP^k \Gamma_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

易知,从属层观点传播系统(10)是系统(11)的子系统。

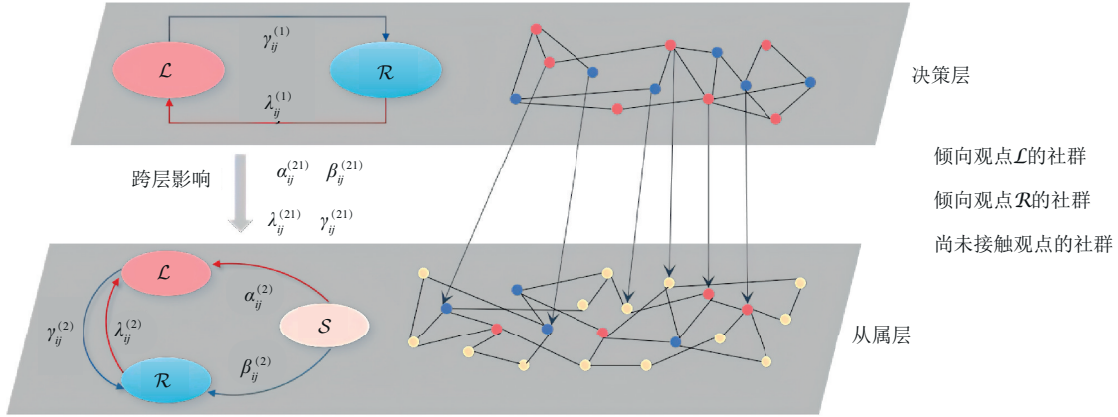


图 2 两层级网络拓扑以及个体状态转移示意图

Fig. 2 Two-layer network topology and diagram of individual state transition

3.2 观点传播模型(11)的适定性

对满足 $0_n \leq x^k, y^k \leq 1_n$ 与 $0_m \leq p^k, q^k \leq 1_m$ 的向量,定义可行域 $\mathcal{H} = \{[(x^k)^T (y^k)^T (p^k)^T (q^k)^T]^T | x^k + y^k \leq 1_n, p^k + q^k = 1_m\}$ 。

假设 2 考虑系统(11),对任意节点 $i, j \in \mathcal{V}$, $\lambda_{ij}^{(\cdot)} \leq \alpha_{ij}^{(\cdot)}$ 和 $\gamma_{ij}^{(\cdot)} \leq \beta_{ij}^{(\cdot)}$ 恒成立。

定理 4 若假设 2 成立,且步长参数满足 $0 < h \leq \frac{1}{\max_{i \in [n]} \left(\sum_{j \in N_i^2} (\alpha_{ij}^{(2)} + \beta_{ij}^{(2)}) + \sum_{j \in N_i^{21}} (\alpha_{ij}^{(21)} + \beta_{ij}^{(21)}) \right)}$, 则集合 $\mathcal{H}$

为系统(11)的正不变集。进一步,对于子系统(10),若初始状态满足 $[(x^0)^T (y^0)^T (p^0)^T (q^0)^T]^T \in \mathcal{H}$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x^k + y^k) = 1_n$ 。

证明 首先,证明不变性。将系统(11)分块拆解,易见 $\begin{bmatrix} p^{k+1} \\ q^{k+1} \end{bmatrix} = \Phi_{21}^k \begin{bmatrix} p^k \\ q^k \end{bmatrix}$, 即为 2.2 节所述系统(9)。结合定理 1,可直接推得 $0_m \leq p^k, q^k \leq 1_m$, 且对任意 i , 恒有 $p_i^k + q_i^k = 1$ 。对于子系统(10),可证对任意 $k > 0$ 和 $i \in \mathcal{V}_2$, 有 $x_i^k + y_i^k \leq 1$ 成立。由式(10)可得

$$z_i^{k+1} = z_i^k - h z_i^k \sum_{j \in N_i^2} (\alpha_{ij}^{(2)} p_j^k + \beta_{ij}^{(2)} q_j^k) - h z_i^k \sum_{j \in N_i^{21}} (\alpha_{ij}^{(21)} p_j^k + \beta_{ij}^{(21)} q_j^k), \quad (12)$$

显然 $z_i^{k+1} \leq z_i^k \leq 1$ 。根据归纳法,在 $p_i^k, q_i^k \in [0, 1]$ 与 $x_i^k, y_i^k \in [0, 1]$ 的前提下,进一步推得 $z_i^{k+1} \geq$

$z_i^k \left(1 - h \sum_{j \in N_i^2} (\alpha_{ij}^{(2)} + \beta_{ij}^{(2)}) - h \sum_{j \in N_i^{21}} (\alpha_{ij}^{(21)} + \beta_{ij}^{(21)}) \right)$ 。结合定理 4 中步长 h 的取值约束, 可得 $z_i^{k+1} \geq 0$, 即对任意 $k > 0$ 和 $i \in [n]$, 均满足 $x_i^{k+1} + y_i^{k+1} \leq 1$ 。参照定理 1 的推导思路, 同理可证 $0 \leq x_i^{k+1} \leq 1, 0 \leq y_i^{k+1} \leq 1$ 。综上, $\mathcal{H}$ 是系统 (11) 的正不变集。

其次, 分析子系统 (10) 的收敛性。由上述结论可知 $z_i^k \in [0, 1]$ 且 $z_i^{k+1} \leq z_i^k$, 因此 $\{z_i^k\}$ 为单调有界序列, 其极限必然存在, 记 $\lim_{k \rightarrow \infty} z_i^k = z_i^*$ 。假设 $z^* = [z_1^*, \dots, z_n^*]^T \neq 0_n$, 则存在 i_1 使得 $z_{i_1}^* > 0$ 。对式 (12) 两边取极限, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j \in N_i^2} (\alpha_{ij}^{(2)} x_j^k + \beta_{ij}^{(2)} y_j^k) + \sum_{j \in N_i^{21}} (\alpha_{ij}^{(21)} p_j^k + \beta_{ij}^{(21)} q_j^k) \right) = 0。$$

由于 $\alpha_{ij}^{(2)}, \beta_{ij}^{(2)} \geq 0$ 且 $p_j^k, q_j^k, x_j^k, y_j^k$ 均有界, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{ij}^{(2)} x_j^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{ij}^{(2)} y_j^k = 0$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{ij}^{(21)} p_j^k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{ij}^{(21)} q_j^k = 0$ 。若对任意 j 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_j^k = \lim_{k \rightarrow \infty} q_j^k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_j^k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_j^k = 0$, 则可进一步推得 $\lim_{k \rightarrow \infty} z_i^k = 1$ 。参照定理 1 的证明思路, 结合反证法与图的强连通性, 即可证得 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i^k + y_i^k) = 1, \forall i \in \mathcal{V}$ 。其余推导过程不再赘述。证毕。

3.3 跨层影响下的观点逆转机制

若无跨层耦合作用, 即 $\Phi_{12}^k = 0$, 从属层网络 $\mathcal{G}_2$ 退化为 2.1 节所述的独立观点传播系统。根据定理 2, 可知若 $(\Gamma_2 - \Lambda_2)$ 非负, 则观点 $\mathcal{R}$ 将在从属层网络 $\mathcal{G}_2$ 中实现“赢家通吃”。

本节研究的核心问题为: 引入从决策层至从属层的非对称跨层影响 ($\Phi_{12}^k \neq 0$) 后, 若从属层在独立演化下倾向观点 $\mathcal{R}$, 则决策层需施加多大强度的跨层干预, 方可逆转从属层固有演化趋势, 驱动其最终收敛至观点 $\mathcal{L}$, 进而在双层网络中实现全局“赢家通吃”? 该问题所揭示的“顶层共识主导、底层观点重构”的传播机理, 是解析层级社交网络中观点竞争演化与全局共识涌现的关键。下文将严格推导从属层发生观点逆转的临界条件。

定理 5 在假设 2 成立的前提下, 对于层级网络观点传播系统 (11), 若同时满足以下条件:

- (i) $\Gamma_2 - \Lambda_2 \geq 0$ 且 $\Lambda_1 - \Gamma_1 \geq 0$ (两矩阵均为非负矩阵);
- (ii) 存在常数 $\delta \in (0, 1)$, 使得 $y^0 < \delta I_n$;
- (iii) 层间传播矩阵 Λ_{21} 满足

$$\|\Lambda_{21}\|_{\infty} > \frac{1 - \sqrt{1 - h^2 \|\Gamma_2 - \Lambda_2\|_{\infty}^2 \delta^2}}{h} + \|\Gamma_2\|_{\infty} - \|\Lambda_2\|_{\infty}, \quad (13)$$

则观点 $\mathcal{L}$ 在整体层级网络中实现“赢家通吃”。

证明 由 $x^k = I_n - z^k - y^k$ 和 $p^k = I_m - q^k$, 可推导出以 y^k, z^k, q^k 为状态变量的系统为

$$\begin{cases} y^{k+1} = M_1 y^k - h Y^k (\Gamma_2 - \Lambda_2) y^k + h G(y^k, q^k) + h F(y^k, q^k, z^k), \\ z^{k+1} = M_2 z^k + h J(y^k, q^k, z^k), \\ q^{k+1} = M_3 q^k - h (I - Q^k) (\Lambda_1 - \Gamma_1). \end{cases} \quad (14)$$

其中: $M_1 = I_n + h \Gamma_2 - h \text{diag}(\Lambda_2 I_n + \Lambda_{21} I_m)$, $M_2 = I_n - h \text{diag}(\Lambda_2 I_n + \Lambda_{21} I_m)$, $M_3 = I_m + h \Lambda_1 - h \text{diag}(\Lambda_1 I_m)$; 非线性映射定义为

$$\begin{aligned} G(y^k, q^k) &= \Gamma_{21} q^k + Y^k (\Lambda_{21} - \Gamma_{21}) q^k, \\ F(y^k, q^k, z^k) &= Y^k \Lambda_2 z^k + \text{diag}((B_2 - \Gamma_2) y^k) z^k + \text{diag}((B_{21} - \Gamma_{21}) q^k) z^k, \\ J(y^k, q^k, z^k) &= Z^k \Lambda_2 z^k + \text{diag}(\Lambda_{21} q^k + B_2 y^k) z^k - \text{diag}(B_{21} q^k + \Lambda_2 y^k) z^k, \end{aligned}$$

G, F, J 均为连续可微函数, 并满足条件 $G(y^k, 0_m) = 0_n, F(y^k, q^k, 0_n) = 0_n$ 和 $J(y^k, q^k, 0_m) = 0_m$ 。

由条件 (13) 可得 $\|\Lambda_{21}\|_{\infty} > \|\Gamma_2\|_{\infty} - \|\Lambda_2\|_{\infty}$, 从而 $\Lambda_{21} I_m > (\Gamma_2 - \Lambda_2) I_n$ 。进一步可得

$$M_1 I_n = I_n + h \Gamma_2 I_n - h \Lambda_2 I_n - h \Lambda_{21} I_m < I_n,$$

因此, $\|M_1\|_{\infty} < 1$, 即 $s(M_1) < 1$ 。根据引理 1, 对任意给定常数 $\zeta_1 > 0$, 存在正定矩阵 P_1 , 使得 $M_1^T P_1 M_1 - P_1 = \zeta_1 I_n$ 。同理可证 $s(M_2) < 1, s(M_3) = 1$ 。相应地, 存在正定矩阵 P_2 和 P_3 , 使得 $M_2^T P_2 M_2 - P_2$ 为负定矩阵, 且 $M_3^T P_3 M_3 - P_3$ 为半负定矩阵。进而存在常数 $\zeta_2 > 0$, 使得 $M_2^T P_2 M_2 - P_2 \leq \zeta_2 I_n$ 。

另一方面,系统(14)存在平衡点 0_{2n+m} 。为证明系统(14)在平衡点 0_{2n+m} 处渐近稳定,构造分块对角型李雅普诺夫函数为

$$V^{k+1}=[(\mathbf{y}^{k+1})^T(\mathbf{z}^{k+1})^T(\mathbf{q}^{k+1})^T]\begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{y}^{k+1} \\ \mathbf{z}^{k+1} \\ \mathbf{q}^{k+1} \end{bmatrix}。$$

由此可得李雅普诺夫差为

$$\Delta V^k = \Delta V_1^k + \Delta V_2^k + \Delta V_3^k, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta V_1^k &= (\mathbf{y}^k)^T (M_1^T P_1 M_1 - P_1) \mathbf{y}^k + 2h(\mathbf{y}^k)^T M_1^T P_1 G - 2h(\mathbf{y}^k)^T M_1^T P_1 Y^k (\Gamma_2 - \Lambda_2) \mathbf{y}^k + \\ &\quad 2h(\mathbf{y}^k)^T M_1^T P_1 F + h^2 G^T P_1 G + 2h^2 G^T P_1 F + h^2 (\mathbf{y}^k)^T (\Gamma_2 - \Lambda_2)^T Y^k P_1 Y^k (\Gamma_2 - \Lambda_2) \mathbf{y}^k - \\ &\quad h^2 (\mathbf{y}^k)^T (\Gamma_2 - \Lambda_2)^T Y^k P_1 G - h^2 (\mathbf{y}^k)^T (\Gamma_2 - \Lambda_2)^T Y^k P_1 F + h^2 F^T P_1 F, \\ \Delta V_2^k &= (\mathbf{z}^k)^T (M_2^T P_2 M_2 - P_2) \mathbf{z}^k + 2h(\mathbf{z}^k)^T M_2^T P_2 J + h^2 J^T P_2 J, \\ \Delta V_3^k &= (\mathbf{q}^k)^T (M_3^T P_3 M_3 - P_3) \mathbf{q}^k - 2h(\mathbf{q}^k)^T M_3^T P_3 (I - Q^k) (\Lambda_1 - \Gamma_1) \mathbf{q}^k + \\ &\quad h^2 (\mathbf{q}^k)^T (\Lambda_1 - \Gamma_1)^T (I_m - Q^k) P_3 (I_m - Q^k) (\Lambda_1 - \Gamma_1) \mathbf{q}^k. \end{aligned}$$

由于 M_1 与 $(\Gamma_2 - \Lambda_2)$ 都是非负矩阵,可得 $(\mathbf{y}^k)^T M_1^T P_1 Y^k (\Gamma_2 - \Lambda_2) \mathbf{y}^k \geq 0$, $(\mathbf{y}^k)^T (\Gamma_2 - \Lambda_2)^T Y^k P_1 G \geq 0$ 且 $(\mathbf{y}^k)^T (\Gamma_2 - \Lambda_2)^T Y^k P_1 F \geq 0$ 。进而可推得

$$\begin{aligned} \Delta V_1^k &\leq (\mathbf{y}^k)^T (M_1^T P_1 M_1 - P_1) \mathbf{y}^k + 2h(\mathbf{y}^k)^T M_1^T P_1 G + 2h(\mathbf{y}^k)^T M_1^T P_1 F + h^2 G^T P_1 G + \\ &\quad 2h^2 G^T P_1 F + h^2 (\mathbf{y}^k)^T (\Gamma_2 - \Lambda_2)^T Y^k P_1 Y^k (\Gamma_2 - \Lambda_2) \mathbf{y}^k + h^2 F^T P_1 F. \end{aligned}$$

结合半负定特性,有 $(\mathbf{q}^k)^T (M_3^T P_3 M_3 - P_3) \mathbf{q}^k \leq 0$ 。对 ΔV_3^k 进一步化简:

$$\begin{aligned} \Delta V_3^k &\leq -h^2 (\mathbf{q}^k)^T \Lambda_1^T P_3 (I_m - Q^k) (\Lambda_1 - \Gamma_1) \mathbf{q}^k + \\ &\quad h^2 (\mathbf{q}^k)^T (\Lambda_1 - \Gamma_1)^T (I_m - Q^k) P_3 (I_m - Q^k) (\Lambda_1 - \Gamma_1) \mathbf{q}^k \leq \\ &\quad -h^2 (\mathbf{q}^k)^T (\Gamma_1 + Q^k (\Lambda_1 - \Gamma_1))^T P_3 (I_m - Q^k) (\Lambda_1 - \Gamma_1) \mathbf{q}^k, \end{aligned}$$

易知 $\Delta V_3^k \leq 0$ 。因此, $M_3^T P_3 M_3 - P_3$,对于子系统 $\mathbf{q}^{k+1} = M_3 \mathbf{q}^k - h(I_m - Q^k)(\Lambda_1 - \Gamma_1)$,状态向量满足 $\mathbf{q}^k \rightarrow 0_m (k \rightarrow \infty)$ 。将式(15)简化为

$$\begin{aligned} \Delta V^k &\leq (\mathbf{y}^k)^T (M_1^T P_1 M_1 - P_1) \mathbf{y}^k + h^2 (\mathbf{y}^k)^T (\Gamma_2 - \Lambda_2)^T Y^k P_1 Y^k (\Gamma_2 - \Lambda_2) \mathbf{y}^k + \\ &\quad (\mathbf{z}^k)^T (M_2^T P_2 M_2 - P_2) \mathbf{z}^k + K_1(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) + K_2(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k), \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} K_1(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) = 2h(\mathbf{y}^k)^T M_1^T P_1 G + h^2 G^T P_1 G, \\ K_2(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k) = 2h(\mathbf{y}^k)^T M_1^T P_1 F + 2h^2 G^T P_1 F + h^2 F^T P_1 F + 2h(\mathbf{z}^k)^T M_2^T P_2 J + h^2 J^T P_2 J, \end{cases} \quad (17)$$

$K_1(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k)$ 和 $K_2(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k)$ 均为连续可微函数。由 $G(\mathbf{y}^k, 0_m) = 0_m$,得 $K_1(\mathbf{y}^k, 0_m) = 0$ 。同理,由 $J(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, 0_m) = 0_m$ 及 $F(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, 0_m) = 0_m$,可得 $K_2(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, 0_m) = 0$ 。由于 $M_2^T P_2 M_2 - P_2 \leq \zeta_2 I_n$,式(16)中对应项可化为

$$(\mathbf{z}^k)^T (M_2^T P_2 M_2 - P_2) \mathbf{z}^k + K_1(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) + K_2(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k) \leq -\zeta_2 \|\mathbf{z}^k\|_\infty^2 + K_1(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) + K_2(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k)。$$

对任意 $\varepsilon > 0$,存在常数 N_1 和 η_1 ,使得当 $k > N_1$ 且 $\|\mathbf{q}^k\|_\infty < \eta_1$ 时, $K_1(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) < \varepsilon$ 。同理,存在常数 N_2 和 η_2 ,使得当 $k > N_2$ 且 $\|\mathbf{z}^k\|_\infty < \eta_2$ 时, $K_2(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k) < \varepsilon$ 。对于固定值 $\zeta_2 \|\mathbf{z}^k\|_\infty^2$,取 $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $k > N$ 且 $\|\mathbf{q}^k\|_\infty < \eta$ 时, $K_1(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) + K_2(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k) < -\zeta_2 \|\mathbf{z}^k\|_\infty^2$ 。设存在 $\delta > 0$ 满足初始约束 $\mathbf{y}^0 < \delta I_m$,并由数学归纳法假设 $\mathbf{y}^k < \delta I_m$ 。对于 $k+1$ 时刻,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{k+1} &= (I_n + h\Gamma_2 - h\text{diag}(\Lambda_2 I_n + \Lambda_{21} I_m)) \mathbf{y}^k - hY^k (\Gamma_2 - \Lambda_2) \mathbf{y}^k + hG(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) + hF(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k) < \\ &\quad \delta(I_n + h\Gamma_2 - h\text{diag}(\Lambda_2 I_n + \Lambda_{21} I_m)) I_n + hG(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) + hF(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k) < \\ &\quad \delta I_n + hG(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) + hF(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k). \end{aligned} \quad (18)$$

对上述给定的 η ,当 $\|\mathbf{q}^k\|_\infty < \eta$ 且 $\|\mathbf{z}^k\|_\infty < \eta$ 时,仍有 $\mathbf{y}^{k+1} < \delta I_n$ 。结合 $M_1^T P_1 M_1 - P_1 = \zeta_1 I_n$,可得 $P_1 =$

$\zeta_1 \sum_{k=0}^{\infty} (M_1^T)^k (M_1)^k$, 进而 $0 < \|P_1\|_{\infty} \leq \zeta_1 \sum_{k=0}^{\infty} \|M_1^T\|_{\infty}^k \|M_1\|_{\infty}^k \leq \frac{\zeta_1}{1 - \|M_1\|_{\infty}^2}$ 。因此, 式(16)前两项满足

$$(\mathbf{y}^k)^T (M_1^T P_1 M_1 - P_1) \mathbf{y}^k + h^2 (\mathbf{y}^k)^T (\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2)^T Y^k P_1 Y^k (\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2) \mathbf{y}^k \leq \\ -\zeta_1 \|\mathbf{y}^k\|_{\infty}^2 + h^2 \frac{\zeta_1}{1 - \|M_1\|_{\infty}^2} \|\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}^2 \|\mathbf{y}^k\|_{\infty}^4 \leq \left(-1 + h^2 \frac{\|\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}^2}{1 - \|M_1\|_{\infty}^2} \delta^2 \right) \zeta_1 \|\mathbf{y}^k\|_{\infty}^2。$$

由条件 $\|\mathbf{\Lambda}_{21}\|_{\infty} > \frac{1 - \sqrt{1 - h^2 \|\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}^2 \delta^2}}{h} + \|\mathbf{\Gamma}_2\|_{\infty} - \|\mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}$, 可得

$$1 - h^2 \|\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}^2 \delta^2 > (1 + h \|\mathbf{\Gamma}_2\|_{\infty} - h \|\mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty} - h \|\mathbf{\Lambda}_{21}\|_{\infty})^2, \quad (19)$$

从而有 $\frac{h^2 \delta^2 \|\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}^2}{1 - \|M_1\|_{\infty}^2} < 1$ 。综上所述, 李雅普诺夫差分满足

$$\Delta V^k \leq \left(-1 + h^2 \frac{\|\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}^2}{1 - \|M_1\|_{\infty}^2} \delta^2 \right) \zeta_1 \|\mathbf{y}^k\|_{\infty}^2 - \zeta_2 \|\mathbf{z}^k\|_{\infty}^2 + K_1(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k) + K_2(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}^k, \mathbf{z}^k) \leq 0, \quad (20)$$

且 $\Delta V^k = 0$ 当且仅当 $\mathbf{q}^k = \mathbf{0}_m$ 且 $\mathbf{y}^k = \mathbf{z}^k = \mathbf{0}_n$ 。当 $\mathbf{q}^k \neq \mathbf{0}_m$, $\mathbf{y}^k \neq \mathbf{0}_n$ 或 $\mathbf{z}^k \neq \mathbf{0}_n$ 时, $\Delta V^k < 0$ 。因此, 系统(14)渐近收敛于 $\mathbf{0}_{2n+m}$ 。根据 $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}^k + \mathbf{y}^k) = \mathbf{1}_n$, 可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{1}_n$ 。同理可证 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}^k = \mathbf{1}_m$ 。综上所述, 观点 $\mathcal{L}$ 在层级网络中实现“赢家通吃”效应。证毕。

注 1 定理 5 揭示了层级社交网络中, 决策层依托单向跨层耦合作用重塑从属层观点竞争格局的内在机制。条件(1)保证了无跨层影响时的固有演化特征: 从属层天然收敛于观点 $\mathcal{R}$, 决策层天然收敛于观点 $\mathcal{L}$, 形成分层演化的基本态势。条件(2)限定了从属层内观点 $\mathcal{R}$ 的初始分布上界, 即 $\mathbf{y}^0 < \delta \mathbf{1}_n$; 该条件与条件(3)共同表明, δ 越大, 从属层初始阶段的 $\mathcal{R}$ 观点优势越强, 观点逆转所需的跨层影响临界阈值 $\theta_c = \frac{1 - \sqrt{1 - h^2 \|\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}^2 \delta^2}}{h} + \|\mathbf{\Gamma}_2\|_{\infty} - \|\mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}$ 也越大。这意味着, 只有当观点 $\mathcal{R}$ 的初始优势被限制在合理范围内时, 决策层方可凭借足够强的跨层干预, 完成底层观点导向的逆转。条件(3)明确了跨层传播强度 $\|\mathbf{\Lambda}_{21}\|_{\infty}$ 实现从属层由 $\mathcal{R}$ 向 $\mathcal{L}$ 观点转向的临界下界。该临界阈值关于 δ 与 $\|\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Lambda}_2\|_{\infty}$ 单调递增, 直观体现出: 从属层初始观点优势越强、内部固有观点偏好差异越大, 决策层逆转底层舆论走向的难度就越大, 二者对观点逆转阻力存在协同放大作用。

4 数值模拟

4.1 决策层网络独立传播仿真

层级社交网络结构及决策层观点传播轨迹如图 3 所示。设定决策层网络 $\mathcal{G}_1$ 包含 6 个社群, 层内拓扑为完全连通结构(见图 3(a))。此时决策层观点已充分传播, 无中立未接触个体, 各社群呈现差异化观点倾向。给定初始观点分布: $\mathbf{p}^0 = [0.5 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.9 \ 0.45 \ 0.1]^T$ 和 $\mathbf{q}^0 = [0.5 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.1 \ 0.55 \ 0.9]^T$ 。交互参数矩阵定义为

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.6 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.30 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.20 & 0.3 & 0.2 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.50 & 0 & 0 & 0.6 & 0.5 & 0.6 \\ 0.35 & 0.6 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.6 & 0.63 & 0.77 & 0.20 & 0.25 \\ 0.50 & 0.3 & 0.60 & 0 & 0 & 0.50 \\ 0.57 & 0.5 & 0.40 & 0.70 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0 & 0.40 & 0.30 & 0.38 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0.60 & 0.50 & 0.90 \\ 0.50 & 0.7 & 0 & 0 & 0.40 & 0.60 \end{pmatrix},$$

满足 $\mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{\Gamma}_1 \geq 0$ 。这意味着决策层内个体由观点 $\mathcal{R}$ 转向观点 $\mathcal{L}$ 的转化速率始终不低于反向切换速率, 因此决策层固有演化趋势天然偏向观点 $\mathcal{L}$ 。仿真可视化结果如图 3(b) 所示, 其中红色表示社群内观点 $\mathcal{L}$ 支持者的比例, 蓝色表示观点 $\mathcal{R}$ 支持者的比例。数值仿真结果表明, 即便初始阶段社群 6 中观点 $\mathcal{R}$ 占据绝对优

势($q_6^0 = 0.9$), 在 $\mathbf{A}_1 - \mathbf{\Gamma}_1 \geq 0$ 的驱动下, 观点 $\mathcal{L}$ 仍持续扩散并逐步主导全局。最终, 决策层所有社群个体完全收敛至观点 $\mathcal{L}$ 、摒弃观点 $\mathcal{R}$, 观点 $\mathcal{L}$ 在决策层网络中实现“赢家通吃”效应。

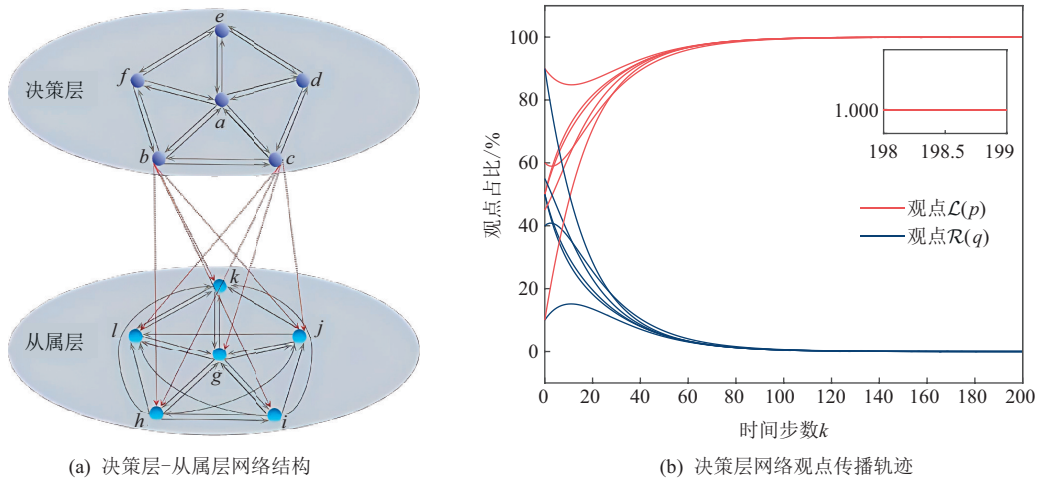


图3 层级社交网络结构及决策层观点传播轨迹

Fig. 3 Hierarchical social network structure and opinion propagation trajectory in the decision layer

4.2 从属层网络观点独立传播仿真

考虑从属层网络 $\mathcal{G}_2$ 包含6个社群, 网络结构如图3(a)所示, 此时网络中存在大量未接触观点信息的个体。初始观点分布定义为 $\mathbf{x}^0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0.1]^T$ 和 $\mathbf{y}^0 = [0.5 \ 0 \ 0.4 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$ 。交互参数矩阵给定为

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.8 & 0.80 & 0.50 & 0.6 & 0.98 \\ 0.60 & 0.1 & 0.56 & 0.98 & 0.9 & 0.70 \\ 0.50 & 0 & 0.30 & 0.65 & 0.8 & 0.40 \\ 0.60 & 0 & 0 & 0.30 & 0.9 & 0.76 \\ 0.88 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.75 \\ 0.90 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.50 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.40 & 0.50 & 0.34 & 0.30 & 0.92 \\ 0.30 & 0.10 & 0.35 & 0.88 & 0.72 & 0.70 \\ 0.35 & 0 & 0.20 & 0.45 & 0.78 & 0.20 \\ 0.48 & 0 & 0 & 0.40 & 0.69 & 0.32 \\ 0.80 & 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.70 \\ 0.52 & 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.50 \end{pmatrix},$$

满足 $\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{A}_2 \geq 0$, 因此网络内部动力学天然偏向于观点 $\mathcal{R}$ 。该场景非对称跨层影响, 故设定 $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{B}_{21} = \mathbf{A}_{21} = \mathbf{\Gamma}_{21} = \mathbf{0}_{6 \times 6}$ 。系统(10)对应的相平面轨迹如图4所示。仿真结果表明, 尽管初始状态下社群5和社群6存在少量观点 $\mathcal{L}$ 的支持者 ($x_5^0 = 0.2, x_6^0 = 0.1$), 但在 $\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{A}_2 \geq 0$ 的驱动作用下, 从属层所有社群个体完全接纳观点 $\mathcal{R}$ 、摒弃观点 $\mathcal{L}$, 即观点 $\mathcal{R}$ 在从属层实现“赢家通吃”效应。该结果直接验证了定理2中 $\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{A}_2 \geq 0$ 时观点 $\mathcal{R}$ 占优胜出的充分条件。

4.3 跨层影响下从属层网络上观点的逆转仿真

保持4.1节决策层网络的初始状态向量 $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ 与传播系数矩阵 $\mathbf{A}_1, \mathbf{\Gamma}_1$ 不变, 同时保留4.2节从属层网络的初始状态 $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0$ 与交互参数矩阵 $\mathbf{A}_2, \mathbf{\Gamma}_2$ 。模型满足 $\|\mathbf{y}^0\|_\infty < \delta = 0.6$, 固定传播步长 $h = 0.1$ 。进一步考虑决策层网络对从属层网络的单向跨层影响, 预设层间影响矩阵 $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{B}_{21} = \mathbf{\Gamma}_{21} = \mathbf{0}_{6 \times 6}$, 在此基础上引入非全连接的差异化跨层作用关系: 仅允许决策层节点 b 作用于从属层节点 h, i, j, k , 决策层节点 c 作用于从属层节点 g, h, j, l , 各节点依次对应矩阵行索引1~6。给定跨层权重矩阵为

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.89 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.93 & 0.73 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.89 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.88 & 0.97 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.78 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

经计算可得 $\|\mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{A}_2\|_\infty = 1.32, \|\mathbf{A}_{21}\|_\infty = 1.85$, 临界阈值 $\theta_c = 0.9614$ 。引入跨层耦合作用后, 系统(10)的观点演化传播结果如图4(b)所示。仿真结果表明, 从属层网络 $\mathcal{G}_2$ 初始状态本身偏向观点 $\mathcal{R}$ ($\|\mathbf{y}^0\|_1 >$

$\|x^0\|_1$)且内部动力学条件 $\Gamma_2 - \Lambda_2 \geq 0$ 也天然支撑观点 $\mathcal{R}$ 的传播;但在跨层矩阵 Λ_{21} 的持续耦合作用下,决策层中占优势的观点 $\mathcal{L}$ 通过定向跨层链路持续输入至从属层,逐步压制观点 $\mathcal{R}$ 的传播优势,最终促使从属层所有个体完全转向观点 $\mathcal{L}$ 。该演化现象有效验证了定理 5 的核心结论:当跨层影响强度超出由网络内部偏好与初始观点分布共同确定的临界阈值时,决策层的优势观点可逆向颠覆从属层的固有演化趋势,最终在从属层实现观点 $\mathcal{L}$ 的“赢家通吃”。对比图 4(a)与图 4(b)的演化轨迹可清晰看出,无跨层干预时,从属层全局稳定收敛于 $\mathcal{R}$;引入有效跨层影响后,系统最终收敛于观点 $\mathcal{L}$,充分凸显了跨层耦合作用在多层网络观点博弈演化中的决定性调控作用。

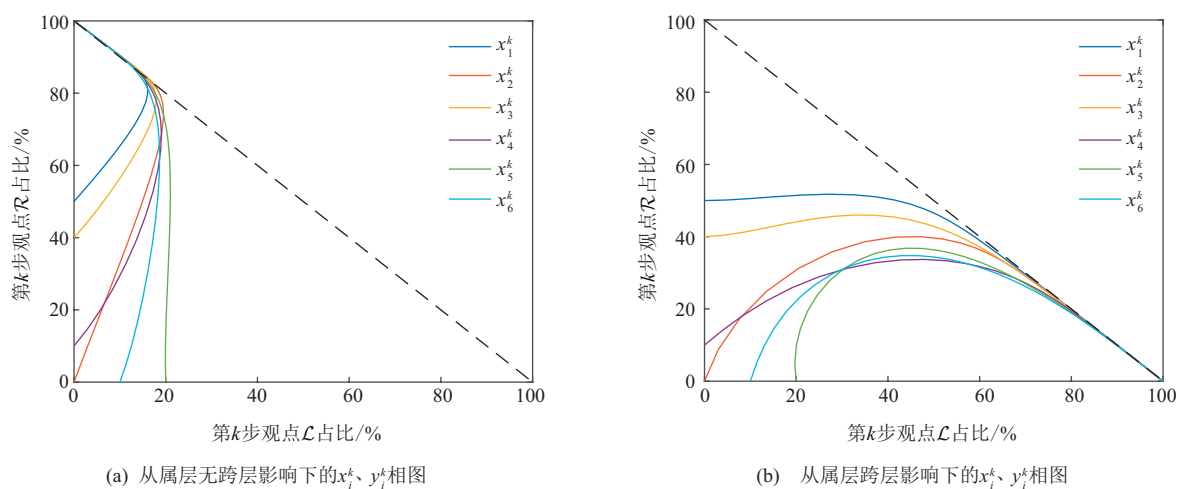


图 4 从属层观点演化的相图:无跨层影响与跨层影响对比

Fig. 4 Phase portraits of opinion evolution in the subordinate layer: with and without cross-layer influence

4.4 不同网络拓扑下的仿真比较

为探究网络拓扑结构对跨层耦合下观点传播动态演化过程的影响,本节将网络节点规模拓展至 50 个,分别构建 WS 小世界网络与 BA 无标度网络开展对比分析。其中,WS 小世界网络基于 Watts-Strogatz 模型^[28]生成,设置节点总数 $N=50$,平均度 $\langle k \rangle=4$,边重连概率 $p=0.3$,具备高聚类系数、短平均路径长度的典型小世界特征;BA 无标度网络采用 Barabási-Albert 模型^[29]构建,初始核心节点数 $m_0=3$,最终网络节点数同样为 $N=50$,平均度约为 5.76,呈现幂律度分布、枢纽节点主导的无标度拓扑特性。两种网络节点总量一致,并将边数控制在相近区间:WS 网络约 100 条边,BA 网络约 144 条边,确保二者网络密度具有可比性。参数矩阵 $\Lambda_1, \Gamma_1, \Lambda_2, \Gamma_2$ 沿用原有规则随机生成,严格满足约束条件 $\Lambda_1 - \Gamma_1 \geq 0, \Gamma_2 - \Lambda_2 \geq 0$;跨层影响矩阵 Λ_{21} 的作用强度统一设定为临界阈值以上。

定义安全裕度 $\text{Margin} = \|\Lambda_{21}\|_\infty - \theta_c$ (其中 θ_c 为定理 5 中定义的临界阈值)。在固定局部聚类系数与跨层影响强度的约束条件下,表 3 所示的度分布异质性主导了观点传播效率的差异。

表 3 WS 小世界网络与 BA 无标度网络的拓扑特性及传播效率

Tab. 3 Topological properties and propagation efficiency of WS small-world and BA scale-free networks

指标网络	节点数 N	边数	平均度 $\langle k \rangle$	度分布标准差	最大度	从属层聚类系数	Margin	收敛步数	
								$\Lambda_{21}=0$	$\Lambda_{21} \neq 0$
WS	50	100	4	0.81	6	0.196 7	4.52	217	294
BA	50	144	5.76	3.79	18	0.192 2	3.17	203	198

如图 5 所示,BA 无标度网络的从属层存在强枢纽节点(Hub 节点),在跨层影响作用下,优势观点 $\mathcal{L}$ 能够快速占据这些 Hub 节点,进而触发级联放大效应,使得全局观点共识的收敛速度甚至快于无跨层影响时网络内部的观点竞争速度。这一现象表明,当跨层影响强度足够大时,网络拓扑异质性可转化为观点传播的加速器。相比之下,WS 小世界网络的从属层节点度分布均匀,不存在明显的 Hub 节点。

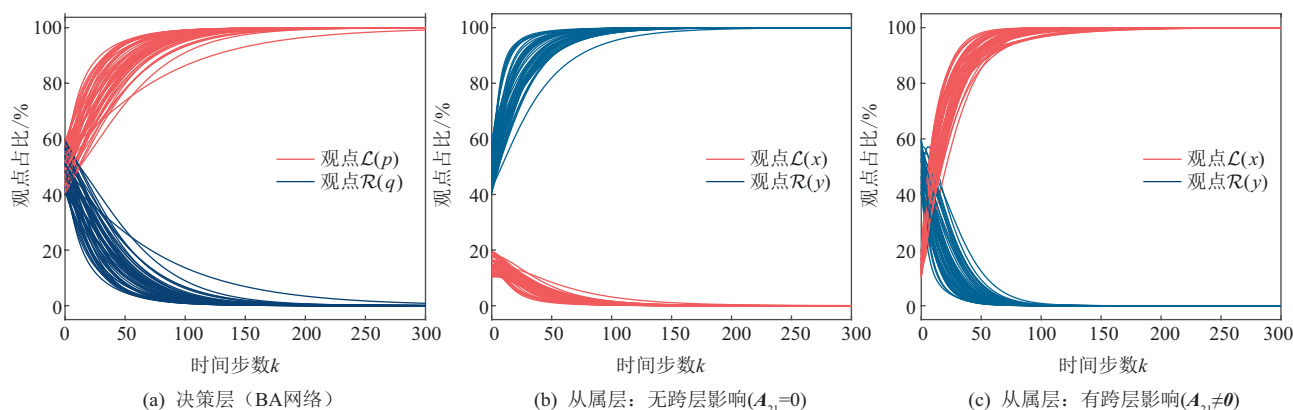


图5 BA无标度网络中的观点演化轨迹

Fig. 5 Opinion evolution trajectories in the BA scale-free network

如图6所示,优势观点 $\mathcal{L}$ 仅能依靠局部短程连接逐步渗透传播,无法形成级联爆发效应,其收敛速度显著慢于BA无标度网络。上述仿真结果证实,度分布的异质性是决定跨层观点逆转速度的关键拓扑因素。

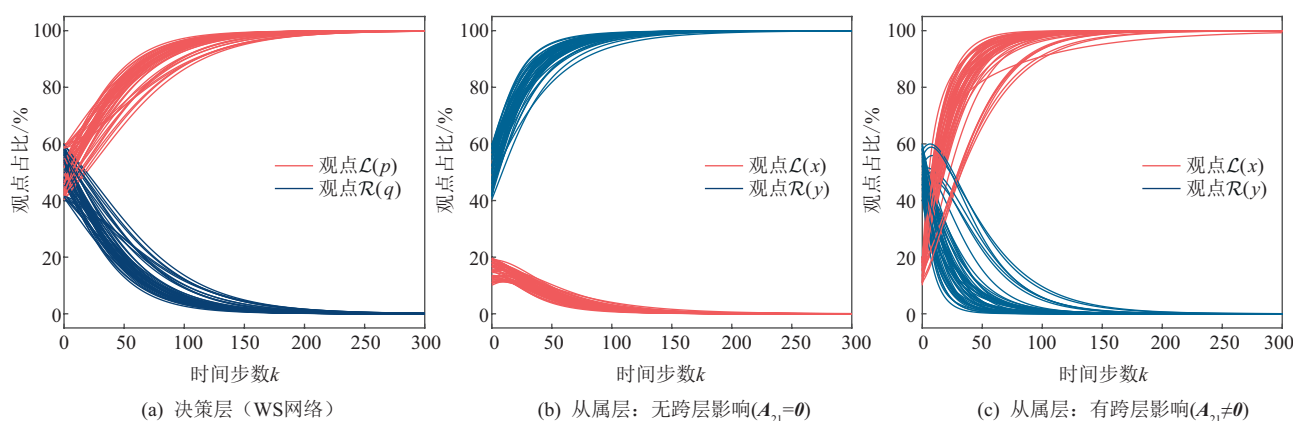


图6 WS小世界网络中的观点演化轨迹

Fig. 6 Opinion evolution trajectories in the WS small-world network

5 总结

本文针对社交网络中对立观点的竞争传播与共识形成问题,从传播阶段与网络层级两个维度开展系统性建模与动力学分析。首先,在单层强连通网络上,分别构建观点扩散初期与后期的离散时间动力学模型,证明了系统的适定性,并给出了单一观点实现“赢家通吃”状态的充分条件。进一步,将模型拓展至含决策层向从属层单向跨层影响的双层网络,建立了层级化观点传播的整体动力学模型。理论分析表明,当决策层趋于观点 $\mathcal{L}$ 占优、从属层独立传播时倾向于观点 $\mathcal{R}$ 时,若跨层影响强度突破临界阈值,则可彻底逆转从属层的观点分布,实现跨层级全局“赢家通吃”效应。通过对比不同网络拓扑结构下的观点演化过程,数值仿真验证了理论分析的正确性,并揭示了度分布异质性在跨层影响下对观点演化的加速作用。本文通过结构化建模与李雅普诺夫稳定性分析,阐明了层级网络中非对称跨层影响在观点竞争中的决定性作用,为解析舆论传播的层级机制、制定舆论共识引导策略提供了理论支撑。

参考文献:

- [1] 张轩宇,陈曦,肖人彬. 后真相时代基于敌意媒体效应的观点演化建模与仿真[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2023, 20(3): 44-51.
- [2] 王龙,田野,杜金铭. 社会网络上的观念动力学[J]. 中国科学:信息科学, 2018, 48(1): 3-23.
- [3] DI MARE A, LATORA V. Opinion formation models based on game theory[J]. International Journal of Modern Physics C, 2007, 18(9): 1377-1395.

- [4] DING Fei, LIU Yun, LI Yong. Co-evolution of opinion and strategy in persuasion dynamics: An evolutionary game theoretical approach[J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2009, 20(3): 479-490.
- [5] SZNAJD-WERON K, SZNAJD J. Opinion evolution in closed community[J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2000, 11(6): 1157-1165.
- [6] MONTROLL E W, BADGER W W. Introduction to quantitative aspects of social phenomena[M]. New York: Gordon and Breach, 1974.
- [7] 艾慧,王鹏,霍杰,等. 用二维 Ising 模型的统计性质理解观点一致的形成[J]. *宁夏大学学报(自然科学版)*, 2018, 39(4): 322-326.
- [8] HOLLEY R A, LIGGETT T M. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model[J]. *The Annals of Probability*, 1975, 3(4): 643-663.
- [9] HEGSELMANN R, KRAUSE U. Opinion dynamics and bounded confidence: Models, analysis and simulation[J]. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 2002, 5(3): 8130429.
- [10] DEFFUANT G, NEAU D, AMBLARD F, et al. Mixing beliefs among interacting agents[J]. *Advances in Complex Systems (ACS)*, 2000, 3(1/2/3/4): 87-98.
- [11] DEGROOT M H. Reaching a consensus[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1974, 69(345): 118-121.
- [12] YUAN Jiangjun, SHI Jiawen, WANG Jie, et al. Modelling network public opinion polarization based on SIR model considering dynamic network structure[J]. *Alexandria Engineering Journal*, 2022, 61(6): 4557-4571.
- [13] ZHANG Mingli, QIN Simeng, ZHU Xiaoxia. Information diffusion under public crisis in BA scale-free network based on SEIR model: Taking COVID-19 as an example[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2021, 571: 125848. DOI:10.1016/j.physa.2021.125848.
- [14] 仲兆满,李恒,杨洪,等. 基于传染病模型的突发事件网民情感演变分析[J]. *数据采集与处理*, 2023, 38(3): 676-689.
- [15] 袁宏婷,汪文帅. 泛在媒体环境下的一类具有话题衍生性的 SEIRS 模型[J]. *宁夏大学学报(自然科学版)*, 2018, 39(1): 42-47.
- [16] WANG Yaqi, YANG Xiaoyuan, HAN Yiliang, et al. Rumor spreading model with trust mechanism in complex social networks[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2013, 59(4): 510-516.
- [17] ZHANG J, MOURA J M F. Diffusion in social networks as SIS epidemics: Beyond full mixing and complete graphs[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2014, 8(4): 537-551.
- [18] GUO Wenjuan, CAI Yongli, ZHANG Qimin, et al. Stochastic persistence and stationary distribution in an SIS epidemic model with media coverage[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2018, 492: 2220-2236.
- [19] LUO Kaiming, GUAN Shuguang, ZOU Yong. Reconstruction of simplex structures based on phase synchronization dynamics[J]. *Acta Physica Sinica*, 2024, 73(12): 120501. DOI: 10.7498/aps.73.20240334.
- [20] CHOI J, GOH K I. Majority-vote dynamics on multiplex networks with two layers[J]. *New Journal of Physics*, 2019, 21(3): 035005. DOI:10.1088/1367-2630/ab0602.
- [21] FANG Fanshu, MA Jing, LI Yanli. The coevolution of the spread of a disease and competing opinions in multiplex networks[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 170: 113376. DOI:10.1016/j.chaos.2023.113376.
- [22] ZHANG Zhiyi, YIN Xiaohu, LIU Haiyan, et al. Research on opinion spreading based on military hierarchical network [C]//*Proceedings of the 3rd International Workshop on Pattern Recognition*. Jinan: SPIE, 2018. <https://doi.org/10.1117/12.2501787>.
- [23] NIAN Fuzhong, LUO Li, LIU Xirui. Information dissemination evolution driven by hierarchical relationship[J]. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, 2024, 11(2): 1967-1978.
- [24] LI P P, HUI P M. Dynamics of opinion formation in hierarchical social networks: Network structure and initial bias[J]. *The European Physical Journal B*, 2008, 61(3): 371-376.
- [25] ZHANG Shuli, MA Jingyuan, MA Jingying. Propagation of incompatible opinions on social networks[C]//*43rd Chinese Control Conference (CCC)*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2024: 9064-9070. DOI: 10.23919/CCC63176.2024.10662304.
- [26] ARONSON E. The theory of cognitive dissonance: A current perspective[M]//*Advances in Experimental Social Psychology Volume 4*. Amsterdam: Elsevier, 1969: 1-34.
- [27] PARÉ P E, LIU Ji, BECK C L, et al. Analysis, estimation, and validation of discrete-time epidemic processes[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, 28(1): 79-93.
- [28] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440-442.
- [29] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509-512.

Opinion Dynamics and Competition Under Social Network With Hierarchical Structures

MA Yan¹, TAN Chee Wei², MA Jingying^{1,3,4*}, MA Jinyuan⁵

(1. School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China;

2. College of Computing and Data Science, Nanyang Technological University, Singapore 639798, Singapore;

3. Ningxia Key Laboratory of Interdisciplinary Mechanics and Scientific Computation, Yinchuan 750021, China;

4. Ningxia Fundamental Mathematics Sciences Research Center, Yinchuan 750021, China;

5. China Intelligence Green Energy (Ningxia) Technology Co., Ltd., Yinchuan 750001, China)

Abstract: This study addresses the competitive propagation of opposing opinions and the formation of consensus in hierarchical social networks by constructing a discrete-time opinion dynamics model based on the mean-field approximation. Initially, in a strongly connected directed network, two distinct phases of opinion propagation are modeled; during the early stage, individuals who have not encountered any opinions are introduced, leading to the development of a three-state propagation dynamics model; in the later stage, as opinions become fully disseminated, the model simplifies to a two-state competitive propagation model. Theoretical analysis confirms the well-posedness of the model and, using Lyapunov stability theory and nonnegative matrix theory, derives sufficient conditions for achieving the “winner-takes-all” effect for a single opinion. Furthermore, the foundational model is expanded to include a two-layer network featuring unidirectional cross-layer influences from the decision layer to the subordinate layer. The analysis reveals that the successful attainment of the “winner-takes-all” effect for a specific opinion is jointly determined by the opinion inclination of the decision layer, the internal connection structure of the subordinate layer, and the intensity of cross-layer influence. Notably, when there is a discrepancy between the inherent opinion inclinations of the decision and subordinate layers, if the norm of the cross-layer influence matrix exceeds a critical threshold, the dominant opinion from the decision layer can completely overturn the original opinion bias of the subordinate layer, culminating in a global “winner-takes-all” scenario across the entire network. Numerical simulations substantiate the validity of the theoretical conditions and the effectiveness of the model, indicating that appropriate regulation of inter-layer influence can effectively steer public opinion in the desired direction.

Key words: opinion dynamics; nonlinear system; hierarchical networks; competing opinions (competitive communication); Lyapunov stability theory

(责任编辑 张 娣)